

Полином
№3 2009
НАУЧНО-
МЕТОДИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ
$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$
$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$
$ax^2+bx+c=0$
$b_n=b_{n-1}\cdot q$
$y=P(x)$
$\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$



Читателю и автору

Журнал «Полином» является научно-методическим журналом, ориентированным на широкую аудиторию лиц, имеющих отношение к преподаванию математики: учителей, методистов, преподавателей и учащихся педвузов, историков образования.

Основная цель журнала — знакомить читателей с исследованиями в области теории и практики обучения математике, работами по истории математики и истории математического образования.

Название журнала — «Полином» — выбрано неслучайно. За словом «полином» скрывается не только математический объект, рациональная функция, но нечто большее. Слово «полином» происходит от греческого πολυς — многочисленный, обширный и латинского nomen — имя, т.е. фактически «полином» означает «много имён». Такое толкование тесно связано с основной задачей журнала: собирать на своих страницах «много имён», много статей из разных уголков страны и мира.

Каждый желающий может предложить свой текст для публикации в журнале. Основные требования, которым должен удовлетворять текст: 1) быть потенциально интересным для читателей; 2) быть представленным в электронном виде (только текстовый редактор Word). Чертежи желательно изготовлять в Corel Draw или «Живой геометрии» и присылать их в отдельных файлах соответствующей программы.

Журнал является бесплатным, гонорары авторам не выплачиваются.

На электронные ресурсы, как и на бумажные, необходимо ссылаться при цитировании. ГОСТ 7.0.5–2008 разъясняет, как организованы ссылки на электронные издания. Ориентируясь на требования, сформулированные в ГОСТе, можно предложить следующий вид ссылки на статью, опубликованную в электронном журнале «Полином»:

Иванов И.И. К вопросу о преподавании математики [Электронный ресурс] // Полином. 2009. № 1. С. 2–8. URL: http://www.mathedu.ru/polinom/polinom2009-1.pdf (дата обращения: 12.01.2009).

Полином

Научно-методический журнал
№ 3/2009

Выходит 4 раза в год

Учредитель
и редактор В. М. Бусев

Ведущий отдела задач
О. А. Файнштейн

Художник
О. П. Богомолова

Издание зарегистрировано в Федеральной службе по надзору в сфере связи и массовых коммуникаций Российской Федерации
Эл. № ФС77-34064

СОДЕРЖАНИЕ



Учим математике



Задачи



Размышления

От редактора

Третий номер журнала «Полином» имеет несколько отличительных особенностей по сравнению с первыми двумя номерами.

Во-первых, он получился довольно объёмным — примерно на треть больше каждого из предыдущих номеров.

Во-вторых, немалая часть статей посвящена геометрии или содержит геометрический материал. Это приятно не только потому, что элементарная геометрия красива, но и потому, что такие статьи показывают, что геометрическое образование ещё живо.

В-третьих, впервые в журнале помещаются тексты, написанные школьниками (см. статью «Двуквадратные числа»). Хочется надеяться, что со временем таких текстов будет больше.

Благодарю Н.Н. Андреева, Н.М. Нетрусову и А.И. Сгибнева за ряд ценных замечаний, улучшивших этот номер журнала.

Редакция ждёт ваших статей, откликов на статьи этого номера и задач.

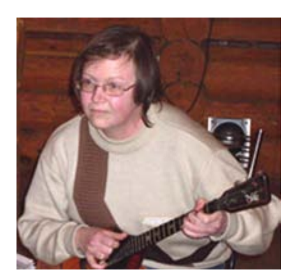
Просьба присылать их **до 1 октября 2009 г.**

В.М. Бусев



Из истории математики

Знакомьтесь: циркуль



Галина Александровна ЗВЕРКИНА
доцент кафедры «Прикладная математика-1»
Московского государственного университета путей сообщения
zverkina@inbox.ru

С циркулем мы знакомимся в школе, и многие до сих пор помнят о том, как ломали голову над задачами о построении геометрических объектов «с помощью циркуля и линейки». Позднее кто-то в своей профессиональной деятельности снова встречается с циркулем – но часто уже не с тем, который используется школьниками. Семейство современных циркулей столь разнообразно, что во многих из них и не признаешь циркуль с первого взгляда.

Циркуль – один из первых инструментов, с которым знакомятся школьники, и одно из древнейших изобретений человека. Но много ли мы знаем об истории циркуля? Как он изменялся и в каком качестве использовался? И всегда ли он выглядел так, как мы привыкли?

Оценить древность использования любого инструмента можно по археологическим находкам – по тем артефактам, которые не могли быть созданы без помощи этого инструмента. Многие древнейшие сооружения времён неолита имеют круглую форму. Круг – один из первых мистических символов человечества, подобный солнцу; он присутствует на многих сакральных изображениях и в символике всех народов мира. На сооружениях практически всех древних цивилизаций были обнаружены следы использования циркуля.

Время изобретения циркуля неизвестно. Сам принцип описывания окружности с помощью двух равноотстоящих меток (предметов) возник еще во времена камен-

ного века. Окружности можно было описывать и с помощью надломанной или согнутой ветки, и с помощью натянутой гибкой лианы или травинки, и с помощью палки с двумя сучками. Круги могли быть размечены и группой взявшихся за руки людей... А самый простой «циркуль» – это расставленные пальцы человеческой руки, которые применялись и в рисовании дуг, и в измерениях. Главный принцип – постоянное расстояние между двумя точками инструмента – мог быть реализован по-разному. И нарисовать окружность можно различными по внешнему виду инструментами.



Нюй-Ва и Фу-Си

Известно, что в Древней Греции математики уже в VI–V веках до н.э. пользовались циркулями. Какими они были, эти древние инструменты? Скорее всего, в научных исследованиях использовались небольшие инструменты с двумя ножками.

Возможно, одно из древнейших изображений такого циркуля, известное историкам, найдено в Китае. Мифические прародители китайцев Фу-Си и Нюй-Ва держат в руках геометрические инструменты: угольник и циркуль. Видимо, циркуль здесь использован в виде символа знания. Умение применять геометрические инструменты высоко ценилось в тех цивилизациях древности, где математические вычисления были сложны из-за неудобной системы нумерации – будь то иероглифическая запись чисел, или, например, римская нумерация – и «геометрические» вычисления, т.е. результат построений циркулем и линейкой, часто быстрее приводил к результату.



Entreprendre par dessus sa force.

Celluy qui son esprit efforce
Et veult plus qu'il ne peult comprēdre
C'est comme qui veult entreprendre
Oultre son pouoir & sa force.

Страница из книги Gilles Corrozet «Hecatomgraphie», Paris, Denis Janot, 1540, переиздание 1905.

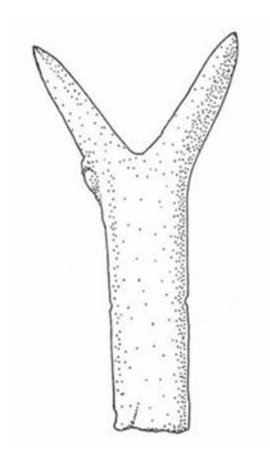
Здесь сломанный циркуль символизирует несбывшиеся надежды стремившегося к образованию человека.

Бессильная попытка

«Тот, кто напрягает свой дух
И хочет больше, чем он может понять,
Подобен тому, кто берётся за то,
Что выше его возможностей и сил».

Со времени возникновения геометрических методов древности циркуль является символом знания и тяги к образованию. Например, после изобретения книгопечатания издавались многочисленные «символариумы» – занимательные книжки с картинками; все картинки снабжались интересной и поучительной, чаще всего рифмованной, подписью. И циркуль здесь частый гость – как символ знания, мудрости и стремления к учебе.

Но, кроме изображений циркуля, хотелось бы увидеть его и как исторический артефакт. И здесь на помощь приходит археология.



Изображение металлического циркуля, найденного во Франции. Возможно, с его помощью создавались циркульные узоры.

Самый древний из найденных циркулей, датированный I веком н.э., был обнаружен археологами во Франции. Он представляет собой металлическую рогульку, с помощью которой, возможно, процарапывались или размечались небольшие окружности.

Подобные найденному во Франции циркулю инструменты широко использовались и во многих других регионах мира для создания так называемых «циркульных» орнаментов на изделиях из дерева, кости, рога и др.

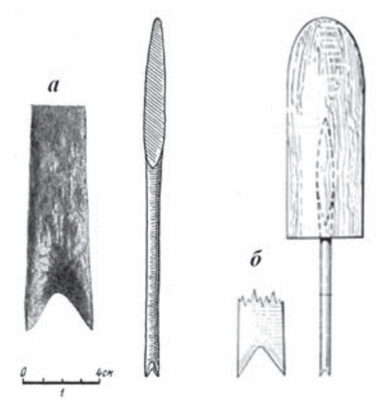
На раскопках в Великом Новгороде были обнаружены металлические циркули-резцы для нанесения циркульных (состоящих из окружностей и дуг) узоров на дерево или кость. Они похожи на древний циркуль, найденный во Франции.

Циркульные узоры были распространены во всех древних цивилизациях. На территории России в самых разных районах обнаружены предметы с такими узорами.





Костяные гребни с циркульным узором.
По книге: Археология СССР. Древняя Русь. Быт и культура. Под общ. ред. Б.А. Рыбакова. М., 1997.



Циркульные резцы XII в.
а – по книге: Колчин Б.А. Железообрабатывающее ремесло Новгорода Великого. М., 1959.
б – по книге: Древняя Русь. Город, замок, село. М., 1985.

Но надо сказать, что гораздо более древние изображения окружностей (циркульные узоры) имеются на изделиях протогеометрической керамики, т.е. на древних глиняных сосудах, украшенных простейшими геометрическими орнаментами, в том числе и наборами концентрических окружностей. Такие узоры были обнаружены археологами практически всех регионов мира. Как наиболее изученная, протогеометрическая керамика Средиземноморья (и, в частности, Греции) имеет наибольшую известность. Следует отметить, что не на всех античных керамических сосудах с циркульными узорами эти узоры правильны – видимо, инструменты для нанесения концентрических окружностей на бока сосудов были дороги и не всегда имелись в распоряжении древних мастеров. Но в тех случаях, когда окружности правильные, практически всегда можно заметить в их центре отметку от острия рисующего инструмента – циркуля (см. рис. на следующей странице).



Протогеометрическая керамика из собрания ГМИИ им. А.С. Пушкина. X–IX вв. до н.э.

Интересно здесь отметить, что в Греции существовала легенда о том, что Талос (или же Пердикс, ученик и племянник Дедала) «сделал железную копию челюсти рыбы и, таким образом, изобрёл пилу... изобрёл гончарный круг, а также приспособление для черчения окружностей...» (выделено мной. – *Г.З.*).

Надо сказать, что греки приписывали своим согражданам или мифическим героям многие открытия[1], и причин этому было несколько. Во-первых, молодая государственность в окружении древних египетской и шумерской цивилизаций стремилась самоутвердиться. А, во-вторых, у древнего человека не укладывалось в голове, что одно и то же приспособление могло быть независимо изобретено разными людьми в разных местах и в разное время. Кроме того, в Древней Греции, в отличие от других древних цивилизаций, очень рано возникло понятие авторства – у значительной части греческих сочинений, изобретений или художественных произведений были известны авторы. И поэтому в эллинистическом мире стремились знать авторов значимых изобретений, а если таковых не было, ими становились мифические или полумифические персонажи.

Но циркули существовали задолго до возникновения греческих государств. Изобретение металлических циркулей можно отнести ко времени появления у человека первых бронзовых изделий. Дело в том, что изготовление предметов из металла, их ковка предполагают наличие клещей (и эти инструменты как атрибуты ремесленника часто встречаются на древних египетских и греческих изображениях). Но ведь конструкция клещей и циркуля практически одинакова! Кроме того, многочисленные медицинские (хирургические) инструменты, в том числе пинцеты, древние ножницы пружинного и шарнирного вида, которые обнаруживаются археологами в самых разных уголках мира, – всё это тоже близкие «родственники» циркуля.

То есть циркуль был известен задолго до начала становления греческой цивилизации. Быть может, Талос (или Пердикс) изобрёл не циркуль, а приспособление для создания циркульных узоров? Возможно, это было приспособление типа штангенциркуля с несколькими рисующими стержнями?

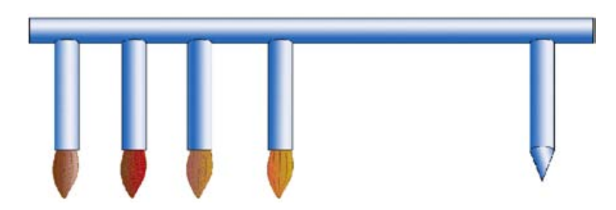


Схема предполагаемого изобретения Талоса. Вероятно, такого рода инструменты были дороги и недоступны некоторым мастерам, наносившим циркульные узоры «от руки».

[1] По словам Плиния (Естественная история, VII, 56, 57), Дедал изобрёл плотничье дело, пилу, топор, отвес, бурав, клей (*glutinum*) и ихтиоколу (рыбий клей). Наугольник, уровень, токарный резец и ключ изобрёл Феодор Самосский. Также Плиний приписывает грекам изобретение клещей, молота, лома и наковальни. А «колодцы изобрел Данай, прибывший из Египта». Гигин (Мифы, 274) считает, что циркуль и пилу из рыбьего хребта изобрёл Пердикс; это же говорят Диодор (Историческая библиотека, IV, 76, 4–6) и Овидий (Метаморфозы, VIII, 244–249).

Вернёмся к древнейшему известному циркулю. Надо сказать, что много гораздо более совершенных разнообразных бронзовых инструментов, в том числе и циркулей, было найдено в развалинах Помпеи; следы циркульной разметки заметны на некоторых древнеримских монетах (см. http://www.trajan.ru/howmade.html).



Бронзовые инструменты, найденные в Помпеях.

Итак, циркуль был известен человеку с древнейших времен. Но всегда ли он был таким – с двумя ножками? Ясно, что принцип действия циркуля – это постоянное расстояние между двумя его точками. И этот принцип можно реализовать по-разному, поэтому исторически циркули были трёх основных видов, и предназначены они были для выполнения трёх основных операций – рисования окружностей и дуг, измерения и разметки.

Все мы привыкли воспринимать циркуль как инструмент с двумя ножками-стержнями, закреплёнными шарнирным соединением. Но истории известны и другие конструкции циркулей. Это верёвочные циркули (два стержня, связанных бечевой), штангенциркули (закреплённые на одной балке параллельные стержни) и всем знакомые кронциркули или циркули с головкой (две ножки-стержня, шарнирно соединённые головкой). К семейству кронциркулей относятся также *«пропорциональные»* и «*совершенные*» циркули.

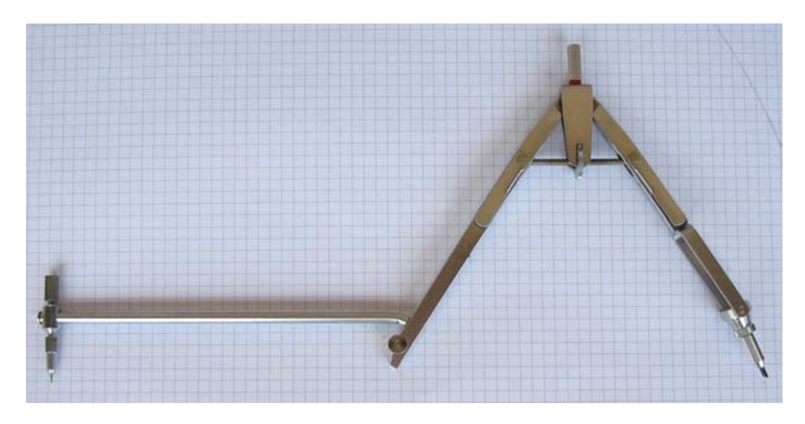
Самый простой тип циркуля – это *верёвочный* циркуль, т.е. верёвка с отмеченными на ней (чаще всего узлами) расстояниями или с закреплёнными на концах стержнями. Такие инструменты использовались, например, в Древнем Египте при разметке земельных участков после очередного разлива Нила. Несмотря на свою примитивность, верёвочный циркуль используется и сейчас – там, где надо нарисовать дугу очень большого радиуса (например, при разметке спортивных арен) или там, где использование «жёсткого» циркуля неудобно – их часто можно увидеть в руках садовников и кровельщиков.

Другой вид циркуля – это *штангенциркуль*, или циркуль, короткие ножки которого могут передвигаться вдоль размеченной планки (штанги) – естественное усовершенствование верёвочного циркуля. Такие циркули применяются в основном при измерении – и достаточно больших объектов, и очень маленьких. С помощью штангенциркуля можно измерять не только наружную толщину предмета, но и внутренний диаметр отверстий, и их глубину. Штангенциркулями пользуются и лесники для измерения стволов деревьев, и ювелиры для оценки размеров обрабатываемых миниатюрных изделий. Штангенциркули существуют достаточно давно: в европейских музеях сохранились деревянные штангенциркули сапожников – такие циркули давали достаточно грубые результаты измерений. Сейчас движущуюся планку металлического штангенциркуля часто оснащают винтом, чтобы иметь возможность фиксировать расстояния более точно. Измерительные штангенциркули оснащаются электронной аппаратурой и могут измерять предметы с потрясающей точностью. Они же используются сейчас, например, и при вырезании круглых отверстий, поскольку являются родственником инструментов для высверливания или вырезания больших отверстий (свёрла-«балеринки» или перовые свёрла).

Но лучше всего нам знаком циркуль с двумя шарнирно соединёнными ножками, или *кронциркуль* (циркуль с головкой).

Было изобретено огромное количество модификаций кронциркулей – от миниатюрных «балеринок» для вычерчивания очень маленьких окружностей до больших землемерных циркулей. Существуют циркули для черчения и для измерения. Ювелиры используют миниатюрные кронциркули с заточенными металлическими ножками – с их помощью тончайшими царапинами размечаются контуры рисунков на изделиях[2].

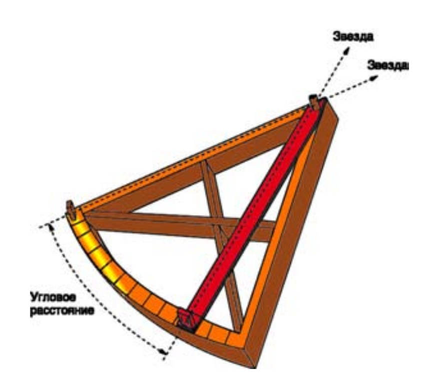
Для измерений применяются циркули с прямыми и изогнутыми ножками – такая форма удобна для измерения внутренних размеров через небольшое отверстие или для измерения толщины широких пластин в разных их местах (эту задачу решают, например, музыкальные мастера, выверяя толщины деки инструмента).



«Гибрид» кронциркуля и штангенциркуля для рисования больших окружностей

[2] Ювелиры – одни из немногих специалистов, которые используют в своей работе геометрические построения с помощью циркуля, ведь по-другому перенести рисунок с эскиза на миниатюрное изделие часто невозможно.

Для рисования окружностей большого радиуса были придуманы циркули, у которых одна удлинённая и изогнутая ножка позволяла рисовать такие окружности относительно небольшим инструментом – «скрещивание» кронциркуля и штангенциркуля дает компактный инструмент для вычерчивания больших окружностей. Добавлялись дополнительные ножки и фиксаторы-шкалы для определения размеров. Иногда при работе циркули располагали горизонтально, а на их ножках крепились подставки-бегунки, которые также участвовали в измерениях или разметке чертежа. Без циркуля не мыслилась деятельность специалистов многих профессий. Например, у артиллеристов специальный военный циркуль, снабжённый отвесом и различными шкалами, позволял произвести наиболее точное прицеливание.



Простейший секстант

Разновидностью циркуля являлось и большинство навигационных инструментов; всем известный секстант – это тоже кронциркуль со специфическими шкалами.


Пропорциональный циркуль-делитель

С древнейших времён существовали и *пропорциональные* циркули. Они предназначались для пропорционального изменения в заранее заданном отношении размеров измеряемого или проектируемого объекта. Один из таких циркулей был найден в Помпейских развалинах. Это был циркуль золотого сечения: раствор разных концов соединённых шарниром в средней части ножек находился в постоянном отношении (в отношении золотого сечения). Были придуманы циркули и с подвижным относительно концов ножек положением шарнира. Такой циркуль позволял легко в произвольной заданной пропорции увеличивать или уменьшать размеры чертежа или измеряемого объекта.
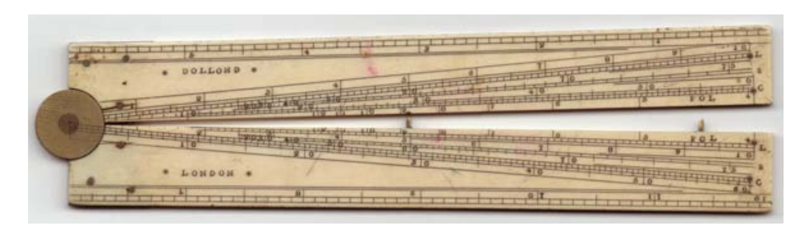
Неудобство такого пропорционального циркуля в том, что нужные расстояния отмечаются его противоположными сторонами. Этого недостатка лишен циркуль, изображённый на следующем рисунке. По такому же принципу можно сделать и циркуль-«многоножку», которым можно откладывать сразу несколько отрезков, находящихся в заданном отношении.
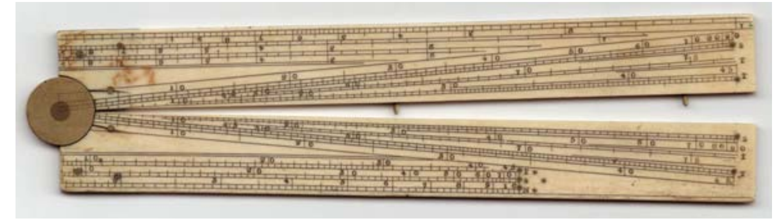
Снабжение циркулей разнообразными и позволяющими решать многочисленные задачи шкалами превратило циркуль в измерительно-вычислительный инструмент, или «пропорциональный циркуль» (под этим названием понимались два вида кронциркулей – уже упомянутый циркуль-делитель и циркуль с широкими ножками-шкалами).



Пропорциональный циркуль с широкими плоскими пластинами-ножками часто располагался горизонтально на чертеже или на местности, и при больших размерах инструмента ему была необ-

ходима подставка. Иногда такими подставками были бегунки-указатели с ножками на нижней стороне. Подобно стеклышку на не совсем ещё позабытой логарифмической линейке, такие бегунки позволяли более точно снимать показания со шкал пропорционального циркуля (см., например, http://brunelleschi.imss.fi.it/esplora/compasso/dswmedia/storia/estoria1.html).



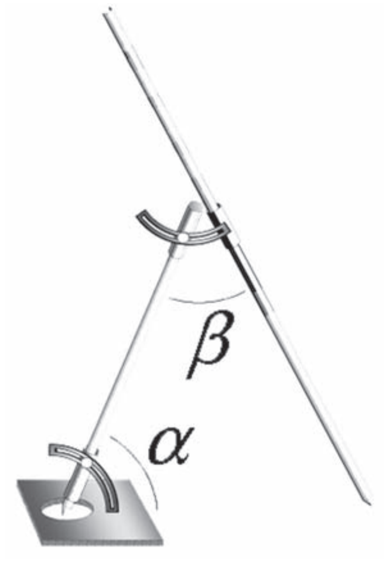


Пропорциональный циркуль с панелями из кости (XIX век). Шкалы на пластинах циркуля были различными, в зависимости от задач, которые стояли перед конструктором. С помощью шкал можно было вычислять (откладывать на чертеже) квадратные и кубические корни, тригонометрические функции, строить правильные многоугольники, производить картографирование местности и решать другие встречающиеся на практике задачи.



Пример использования пропорционального циркуля. Из сочинения Allain Manesson-Mallet. «La Géometrie» pratique (Практическая геометрия) в четырёх книгах (1702).

Но был в истории циркуля и ещё один загадочный персонаж. Это – одна из модификаций кронциркуля – «*совершенный*» или эллиптический циркуль, созданный в античности для вычерчивания гипербол, парабол и эллипсов, и реконструированный арабоязычными учёными в X веке.



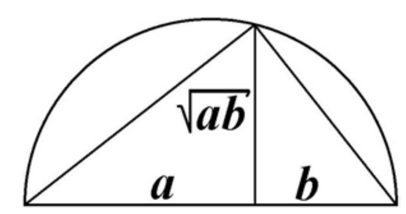
Реконструкция совершенного циркуля по тексту учёного X в. ас-Сиджизи. В зависимости от соотношения углов α и β конец длинного стержня описывает на плоскости эллипс, гиперболу или параболу. Короткая фиксированная ножка циркуля здесь представляет ось конуса, а длинная, свободно двигающаяся в трубке – его образующую. Поэтому если $\alpha = \beta$, то будет нарисована гипербола, если $\alpha < \beta$, то получится парабола, а если $\alpha > \beta$ – эллипс.

В чём причина появления такого необычного инструмента? И зачем рисовать эти кривые столь необычным способом?

Появление инструментов для рисования так называемых конических сечений (эллипса, гиперболы и параболы) относится ко временам древнегреческой математики. Дело в том, что, как известно, греческие учёные решали большинство возникавших в практике задач с помощью циркуля и линейки. Причиной этому была не какая-то сверх-идея или стремление к некой абстрактной науке – нет, причина была та же самая, что и у китайцев, которые обожествили циркуль и угольник, дав его в руки своим мифическим прародителям. По этой же причине в Древней

Индии алгебраические задачи решали геометрически, но вместо жёсткого циркуля и линейки использовали бечеву («Шульба-сутра», или «Правила верёвки», VI век до н.э.). И египтяне, как известно, использовали натянутые верёвки при разметке участков в плодородной долине Нила...

У всех древних цивилизаций было одно общее несчастье – крайне неудобная для вычислений система нумерации. Сначала у всех народов это была иероглифическая система (когда каждому числу соответствовал специальный значок или группа значков), затем эти системы несколько совершенствовались. Но только после повсеместного распространения привычной нам позиционной десятичной «арабской» системы нумерации быстрое вычисление произведений, дробей и даже корней (квадратных и кубических, наиболее часто встречающихся в практике) стало возможным после небольшой арифметической подготовки. А пока такой удобной нумерации не было, древние землемеры, зодчие и конструкторы выходили из положения, решая арифметические и алгебраические задачи геометрическими методами, что часто было гораздо проще и быстрее утомительных и сложных вычислений. Например, арифметически непростая операция вычисления квадратного корня сводится всего лишь к вычерчиванию полуокружности и восставлению перпендикуляра.



Геометрическое извлечение квадратного корня

Древние конструкторы и математики научились решать геометрически достаточно широкий круг задач; сейчас это искусство называется «геометрической алгеброй» древних. Они знали, как строить многие геометрические объекты с помощью циркуля и линейки; умение выполнять такие построения и сейчас свидетельствует о хорошем развитии интеллекта. Навык решения вычислительных и алгебраических задач с помощью циркуля и линейки высоко ценился, и неслучайно поэтому циркуль часто связывали с божествами – например, в Древнем Риме циркуль являлся атрибутом музы астрономии Урании, а в Средние века в Европе циркуль зачастую был в руках Бога-Творца или Спасителя.

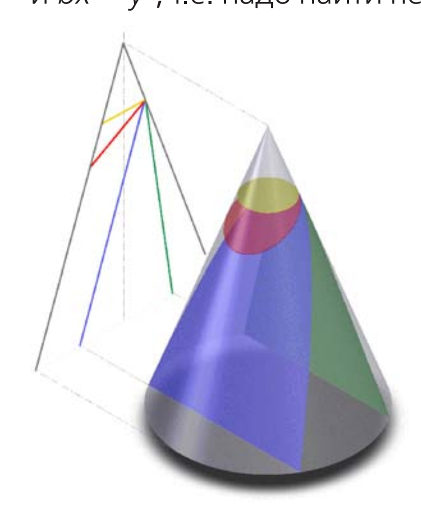


Сотворение мира. Миниатюра. Bible Morallisée (Морализованная Библия). Франция, XIII в. Национальная библиотека Австрии, Вена, рукопись № 2554.

Но античные конструкторы столкнулись с невозможностью решить с помощью циркуля и линейки задачу об извлечении кубического корня, а ведь такая задача часто возникала при необходимости пропорционально изменить размеры некоего объекта, например сосуда или осадного орудия таким образом, чтобы эти размеры соответствовали наперед заданным характеристикам объёма или веса. О том, что такая задача была очень важна для практики, говорят многочисленные легенды о появлении одного из частных её случаев – задачи «об удвоении куба». Эта задача, как и другая знаменитая неразрешимая задача древности о трисекции угла, является задачей третьего порядка, т.е. сводится к решению кубического уравнения. Сейчас известно, что такие задачи невозможно решить с помощью циркуля и линейки.

Уже в V веке до н.э. математик Гиппократ Хиосский определил, что для решения задачи об определении кубического корня необходимо найти два средних пропорциональных: $\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{b}$. В этом случае $x=\sqrt[3]{a^2b}$, а $y=\sqrt[3]{b^2a}$.

Немного позднее, в IV веке до н.э. Менехм, ученик Евдокса Книдского и член Афинской Академии Платона, обнаружил, что для решения задачи «об удвоении куба» по предложенной Гиппократом схеме достаточно найти пересечения кривых, уравнения которых мы сейчас бы записали как $ay=x^2$ и $bx=y^2$, или же кривых $x=\frac{ab}{y}$ и $bx=y^2$, т.е. надо найти пересечение двух парабол или параболы и гиперболы[3].



Конические сечения.
Если секущая плоскость параллельна одной из образующих, то в сечении получается парабола, а в других случаях получаются эллипс или гипербола.

Но главное достижение Менехма – он обнаружил, что эти кривые являются сечениями конуса (Менехм рассматривал только прямоугольные конусы, но позднее выяснилось, что годятся конусы с любым углом при вершине).

Видимо, уже тогда были сделаны первые попытки вычерчивания эллипса, гиперболы и параболы на основе их происхождения как конических сечений. А примерно через 100 лет после открытия Менехма другой греческий математик Аполлоний из Перги написал огромный труд о конических сечениях, в котором определял «симптомы» или характерные свойства этих кривых, которые позволяли изобретать приборы для их удобного и точного вычерчивания по заранее заданным характеристикам.

Но вернёмся к «совершенному циркулю». Его несложно смастерить из двух «козьих ножек» – и убедиться, что им очень неудобно пользоваться. Даже исхитрившись начертить с его помощью более или менее качественную кривую, очень трудно определить, где её оси и фокусы – а их надо знать для того, чтобы использовать при решении задачи «об удвоении куба», или, в общем виде, задачи третьего порядка[4].



«Совершенный циркуль» из двух «козьих ножек»

Кстати говоря, математики мусульманского Востока, которые реконструировали и исследовали совершенный циркуль, уже не нуждались в графическом решении задач – ведь они владели заимствованной у индийцев десятичной позиционной нумерацией (той самой «арабской», которая позднее пришла в Европу), и при решении конкретных вычислительных задач дово-

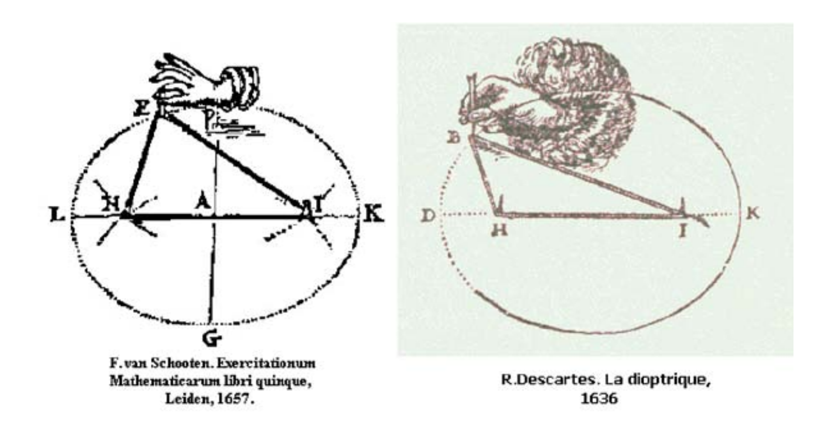
---

[3] Позднее эту задачу научились решать и с использованием третьей кривой второго порядка – эллипса и его частного случая – окружности.

[4] В итальянском музее Истории науки имеется действующая модель совершенного циркуля, но это стационарная модель – см. http://brunelleschi.imss.fi.it/itinerari/immagine/img2627.html.

дили решение до достаточно точного результата. А вопросы использования геометрических методов при решении алгебраических задач они заимствовали из греческих математических сочинений. И, преклоняясь перед великой учёностью античных математиков, они бережно сохраняли и творчески дополняли сочинения Евклида, Архимеда, Диофанта, Аполлония, Герона и др. В этом ряду стоит и сочинение ас-Сиджизи о «совершенном циркуле» – не имея практической пользы, оно было образцом исследования теоретического знания древних.

А как же решали задачу об удвоении куба греки? Изучив «симптомы» конических сечений, они научились достаточно точно вычерчивать конические сечения по заданным характеристикам при помощи специальным образом расположенных бечёвок и шарнирных механизмов, а также изобрели новые кривые для решения задач третьего порядка (конхоиду, циссоиду, спираль и пр.), которые можно было строить механическими приспособлениями. Кроме того, они создали чрезвычайно остроумные инструменты, извлекающие кубические корни без вычерчивания кривых.



Построение эллипса на основе его фокального свойства.
«Метод садовника» вычерчивания эллипса использует открытое в древности свойство эллипса: сумма расстояний от его точек до двух фиксированных – фокусов – постоянна. Подобные «верёвочные» приспособления были изобретены и для вычерчивания гипербол и парабол. При таком построении известны оси и фокусы конического сечения, которые необходимо знать для графического решения задачи «об удвоении куба».

Итак, циркуль в течение многих столетий был основным инструментом математика, механика, инженера, ремесленника. В Средние века и в эпоху Возрождения искусство владения циркулем высоко ценилось в среде художников, ювелиров, архитекторов и квалифицированных ремесленников. Циркуль появляется на гербах цеховых гильдий каменщиков, плотников и пр. в различных городах Европы. Умение быстро разметить с помощью циркуля размеры и контуры создаваемого объекта было необходимым условием признания мастерства – и во многих городах проводятся соревнования по решению практических задач с помощью циркуля и линейки. Циркуль квалифицированного ремесленника, снабжённый дополнительными приспособлениями, украшенный узорами и аллегорическими изображениями, был дорогим и точным инструментом. Размеры циркулей менялись от миниатюрного циркуля ювелира до полуметровых и более циркулей каменщиков.

Но так было лишь до тех пор, пока не стала общеупотребительной позиционная, удобная в вычислениях система нумерации. Циркуль как вычислительное средство потерял своё значение, и основным его применением стали разметка (построение чертежей) и измерение. Впрочем, в некоторых областях человеческой деятельности умение управляться с циркулем важно и по сей день (например, при создании музыкальных инструментов или в ювелирном искусстве). Важную роль стали играть пропорциональные циркули как средство облегчения вычислений при решении практических задач – но это, скорее, были не геометрические, а номографические методы (т.е. методы, основанные на использовании предварительно построенных чертежей, специфических для каждого типа задач).

К началу XVI века античные методы решения задач с помощью циркуля и линейки и математика, основанная на геометрии, стали восприниматься учёными уже как исключительно теоретические построения древнегреческих мыслителей, стремившихся к отвлечённому знанию (немалую роль в формировании такого отношения к греческой науке сыграла и наука мусульманских стран). При этом циркуль активно применялся в самых разных областях деятельности человека – в первую очередь, это архитектура и строительство, затем – ювелирное дело и живопись, типографское дело и пр. Циркуль здесь – необходимый инструмент ремесленника и художника. О своей работе по разметке рисунка на сложных ювелирных изделиях рассказывает, например, Бенвенуто Челлини (1500–1571) в своих мемуарах. А известный художник и математик Альбрехт Дюрер (1471–1528) создал специальное учебное пособие для ремесленников, в котором привёл не только точные способы построения правильных геометрических фигур с помощью циркуля и линейки, но и приближённые методы для тех случаев, когда точное построение невозможно (например, построение правильного девятиугольника). Впрочем, эти приближённые методы построения правильных фигур настолько искусны, что отличие построенной фигуры от правильной невооружённым глазом заметить невозможно.

А как обстояло дело в России?

Согласно исследованиям наших археологов и историков, основным измерительным инструментом при возведении зданий на Древней Руси являлись специально размеченные измерительные шесты – мери́ла. Но у наших предков уже в IX веке имелись и различные металлические инструменты: щипцы, клещи, ножницы и пинцеты. Жители Древней Руси умели делать сложные замки́, а для этого надо было уметь производить достаточно точные измерения и переносить размеры с модели на изготавливаемую деталь. По этим данным можно судить о наличии у них циркулей.

Наиболее известный материал по истории культуры нашей страны – это художественное наследие, в первую очередь – иконы. Если внимательно присмотреться, то на большинстве русских икон можно увидеть следы процарапанных на основе иконы окружностей – намеченных контуров нимбов изображённых персонажей[5]. Под слоем краски на старинных иконах можно различить и углубления в центрах процарапанных окружностей. Причём эти окружности имеют стандартные размеры:

[5] Традиция иконописи предполагает процарапывание контуров будущего изображения на грунте, которым покрыта иконная доска; сами рисунки создавались по строго установленным правилам.

при изображении массовых сцен и на клеймах, обрамляющих «житийные» иконы, все нимбы имеют одинаковые радиусы (т.е. на одной иконе могут быть изображены нимбы двух-пяти, а иногда и большего количества стандартных размеров); у главных персонажей иногда в изображении нимба использовались концентрические окружности. О том, каким инструментом процарапывались эти контуры на православных иконах, мы можем судить по мозаичному изображению виллы Эвстолия в Курионе (Кипр).

В руке персонажа мы видим штангенциркуль-чертилку размером около 20 см – видимо, именно такие инструменты использовались при вычерчивании больших нимбов, а для малых нимбов могли быть использованы и приспособления, подобные древним новгородским циркулям-царапкам. Впрочем, реставраторы считают, что для отдельных больших нимбов могли быть использованы и верёвочные циркули.



Мозаика виллы Эвстолия в Курионе. Кипр. Фото любезно предоставлено И.А. Леваковым (www.archeologia.ru)

А использовались ли на Руси кронциркули? Как уже говорилось, основным инструментом древнерусского зодчего было мерило – размеченный несколькими шкалами шест, с помощью которого отмечались на возводимом сооружении необходимые размеры. Но для мелких работ такие приспособления не годятся.



Закладка Петром Успенского собора в Москве в 1326 г. и собственной гробницы близ жертвенника.

Клеймо иконы «Митрополит Пётр в житии» с венцом (№ 199739). ФГУК «Государственный историко-культурный музей-заповедник «Московский Кремль». Дионисий (?). Конец XV – начало XVI вв.

Вспомним, что с появлением металлообработки практически сразу появлялись такие полезные инструменты, как клещи, щипцы, пинцеты – близкие родственники кронциркуля (и такие предметы найдены в большом количестве археологами России). Естественно предположить, что вместе с ними появились и первые металлические кронциркули. И подтверждение использования кронциркулей на Древней Руси мы находим на одном из клейм иконы с житиём московского святителя митрополита Петра, хранящейся в Московском Кремле. В руке Петра мы видим кронциркуль![6] Неизвестно, было ли изображение циркуля на этой иконе изначально, или оно появилось в ходе позднейших поновлений иконы, но этот символ – символ книжности и знания – говорит о распространённости циркуля в среде образованных жителей Московии.

[6] Пётр, митрополит Киевский и Всея Руси, был поставлен в митрополиты в Константинополе в 1305 г. В 1308 г. он прибыл во Владимир, куда его предшественник митрополит Максим перенёс свою кафедру из Киева. В борьбе между Московским и Тверским князьями Пётр занял промосковскую позицию, и в 1325 г. переехал в Москву.

Интересно, что в позднем списке этой иконы иконописца Фёдора Соколова (1877 г.) в руках у митрополита Петра циркуля нет (видимо, иконописец счел бытовой инструмент ремесленника неподходящим атрибутом святого).

Но циркуль на Руси был не только инструментом учёного. В XV–XVII веках учёт земельных угодий вёлся в соответствии с правилами «сошного письма» о начислении податей в зависимости от количества и качества земли. С XVI века использовались специальные руководства – рукописные «Книги сошного письма», содержащие также некоторые сведения из геометрии и геодезии[7]. Видимо, уже тогда началось использование землемерных циркулей раствором в одну сажень (около 1,5–2 метров); сейчас землемерные циркули обычно имеют раствор 1 или 2 метра.

В древности на Руси циркуль назывался «кружало»[8], а современное его название происходит от немецкого *Zirkel* или польского *Cyrkiel* и вошло в русский язык в петровские времена. Заметим, что, в свою очередь, это слово происходит от латинского слова *circulus* или *circus* – круг, цирк. А слово «центр» (круга) происходит от греческого κεντρον – остриё (одной из ножек циркуля).

Как уже говорилось, с некоторых пор циркуль становится эмблемой ремесленников. Со временем он появляется и на личных гербах дворянства (правда, не родовитого – все древние европейские дворянские роды уже давно обзавелись гербами с более традиционной символикой). Циркуль в художественных произведениях становится не столько инструментом, сколько символом – иногда он соответствовал характеру деятельности человека, избравшего его своим гербом, а иногда – символом тайного, сокровенного знания (циркуль часто присутствует как атрибут знания и книжности на портретах и картинах). Согласно геральдической традиции, циркуль символизирует равенство, мудрость и осторожность. Иногда он появляется и на гербах географов, путешественников и др., отражая область деятельности хозяина герба.



Эмблема Христофора Платэна (середина XVI века).

Издатель украшал книги циркулем с девизом «Labore et constantia» – «Труд и постоянство»

Видимо, впервые как символ конкретной личности циркуль появился на эмблеме Христофора Платэна (Christophe Platin, ум. в 1589 г.) – испанского издателя французского происхождения. Позднее в европейских странах появляется весьма небольшое количество содержащих циркуль гербов «новых» дворян, заслуживших дворянство своей военной или гражданской службой.

Можно предположить, что первым европейцем, использовавшим циркуль в сакральных или магических целях, был руководитель своеобразной научно-мистической школы-секты Пифагор. Мы знаем, что

[7] В древности землю мерили тем временем, которое надо потратить на вспашку, или объёмом высеваемого зерна, или количеством копён сена... Лишь в XV веке появляется единица измерения площади десятина (2500 кв. саженей) и начинает развиваться землемерие.

[8] Это слово позднее имело и другие значения, иногда связанные с круглыми объектами (гончарный круг, приспособление для возведения каменных округлых сводов, сплав леса), но также встречалось и в значении «питейный дом».

первые пифагорейцы опознавали друг друга по некоему геометрическому символу, неизвестному другим. Возможно, это была пентаграмма или пятиугольная звезда, точное построение которой (при помощи циркуля и линейки) непросто.

С развитием связей России с Европой циркуль становится геральдическим символом и в нашей стране. В подражание западным традициям начинают создаваться гербы дворянских родов, и циркуль появляется на них – как на гербах старинных дворянских родов, так и на гербах дослужившихся до дворянства чиновников и офицеров. Причем циркуль с поднятыми вверх ножками символизирует масонство, а прямой угол циркуля – твердость и прямоту обладателя герба.



Российские дворянские гербы.
а. Герб Картмазовых – «гласный» герб: изображена карта и циркуль – атрибуты рисования (мазания) карт. **б.** Герб Горихвостова, указавшего здесь своё масонство. **в.** Герб Михеева, заслужившего потомственное дворянство государственной службой.

В XX веке циркуль часто встречается как символ знания в гербах поселений, учебных заведений и предприятий. В социалистической символике циркуль ассоциировался с трудовой интеллигенцией, и даже предполагалось его использование в гербе СССР.



Дарственное знамя Орехово-Зуевскому уездному комитету РКП(б).
В фондах Государственного центрального музея современной истории России хранится Знамя, дарственное Орехово-Зуевскому уездному комитету РКП(б) от рабочих Дулевского фарфорового завода к 25-летию партии. Рядом с крестьянкой, держащей сноп, мы видим рабочего на фоне дымящего завода, с шестернёй и циркулем – символом трудового разума.
По журналу: «Советский музей», 1986, № 1, с. 19.

Сохранились многочисленные образцы местных денег периода первых послереволюционных лет, украшенных в том числе и изображением циркуля.



Боны (платёжные знаки) Черноморской ж.д.
Из коллекции московского коллекционера-бониста А.В. Ломакина.



Герб Германской Демократической Республики

Позднее циркуль был помещен на герб ГДР.

На купюре 50 германских марок выпуска 1989 г. рядом с портретом немецкого архитектора Бальтазара Неймана (1687–1753) помещено изображение пропорционального циркуля – основного инструмента зодчего тех времен. А на памятной монете 2000 г., посвящённой С.В. Ковалевской, циркуль символизирует математику.

В заключение сообщу, что в Южном полушарии можно видеть созвездие «Циркуль» (*Circinus*), названное так Николя Луи де Лакайлем в XVIII веке. (Де Лакайль очень любил технику и называл созвездия «Компас», «Мольберт», «Микроскоп», «Насос» и т.п. – некоторые созвездия позднее переименовали.)





Казалось бы, циркуль – скучный и невзрачный инструмент... А сколь богата его история и значительно влияние на развитие нашей цивилизации!

Вернуться к содержанию



Перелистывая страницы журнала: очерк истории «Математики в школе» (Часть 1)[1]



Василий Михайлович БУСЕВ
сотрудник Научной педагогической библиотеки им. К.Д. Ушинского,
редактор издательства «Просвещение»
vbusev@yandex.ru

Введение

Юбилей человека – это повод вспомнить о его жизни и творчестве, о его вкладе в науку, культуру и практику. Всякий журнал, как и человек, является живым организмом. Он чутко реагирует на происходящие события, старается их отражать и даже изменять. Журнал «Математика в школе» не является исключением: внимательное его чтение показывает, что он всегда находился в гуще событий, его содержание позволяет проследить историю математического образования в России и СССР. Было бы ошибкой думать, однако, что номера журнала за прошлые годы представляют интерес только для историков образования. Многие из опубликованных некогда материалов могут оказаться полезными современным учителям, методистам, студентам и аспирантам педагогических вузов.

Низведённая ныне до сборника рецептов по подготовке к ЕГЭ, методика обучения математике некогда блистала. Трудно поверить, но в те времена, которые теперь многим хотелось бы забыть, содержательных методических дискуссий было куда больше, чем в наше время декоративной демократии. Учёные, учителя и методисты вполне серьёзно обсуждали подходы к изложению той или иной темы школьного курса математики, писали развернутые рецензии на новые книги, разрабатывали теорию и практику обучения безотносительно к потребностям какой-либо аттестации: акцент делался не на слове «подготовить», а на слове «научить».

[1] Текст с изменениями перепечатан из журнала «Математика в школе» (№ 5, 7, 2009).

Журнал «Математика в школе» сохранил для нас все эти образцы. Одни из них безнадёжно устарели, другие могут быть адаптированы к условиям современной школы, третьи можно использовать безо всяких изменений. Но содержание – это ещё не всё. За содержанием скрывается и общий подход к решению проблем. Многие предметные статьи позволяют увидеть культуру методико-математического исследования, которой сейчас катастрофически не хватает. Таким образом, материалы журнала «Математика в школе» могут служить не только богатой кладовой конкретных разработок, но и нравственно-методологическим ориентиром для начинающих исследователей, не заставших добрых традиций прошлого.

Цель настоящих очерков – рассказать о том, каким был журнал: когда и почему он возник, как развивался, и чем было обусловлено его развитие. Этот краткий исторический обзор не претендует на статус путеводителя по журналу. Такой путеводитель – это отдельная работа, и эта работа уже выполнена: автором настоящих очерков составлен тематический указатель статей, помещенных в журнале за все годы его существования. Первую часть указателя, включающую материалы за 1990–2004 гг., можно бесплатно скачать на сайте http://www.mathedu.ru/journals-collections.

Хронологически рамки очерков ограничены 1934–1990 гг.

Когда и почему возник журнал?

В литературе по истории математического образования нередко встречается путаница относительно того, когда появился журнал, поэтому для начала стоит разобраться с этим вопросом. До революции издавалось несколько журналов для учителей математики, которые после 1917 г. прекратили свое существование. В 1918 г. появился журнал «Математика в школе», который выходил всего один год. Издавался он Отделом реформы школы Наркомпроса РСФСР, содержание его отражало деятельность естественно-математической комиссии этого отдела.

В 1924–1926 гг. при Ленинградском губернском отделе народного образования издавались сборники «Математика в школе» (всего вышло 6 сборников). Как и журнал 1918 г., сборники освещали деятельность небольшой группы лиц одного региона и на статус общероссийского (тем более, союзного) издания претендовать не могли.

В 1927–1930 гг. в Москве выходил журнал «Физика, химия, математика и техника в трудовой школе», в 1931–1932 гг. изменивший название на «Физика, химия, математика и техника в советской школе». Это небольшая на первый взгляд корректировка свидетельствовала о глобальных процессах, происходивших в школьной политике государства: идея трудового обучения отвергалась, школа должна была стать общеобразовательной, по образцу дореволюционной гимназии. В 1933 г. журнал не издавался, а в 1934 стал выходить под названием «Математика и физика в средней школе»[2]. Главным редактором журнала стал А.Н. Барсуков[3].

[2] В 1936 г. – «Математика и физика в школе»; изменение названия связано с тем, что к этому времени неполные средние школы с 8-летним сроком обучения были преобразованы в средние школы с 10-летним сроком обучения.

[3] О нём и других сотрудниках журнала см.: *Черкасов Р.С.* К шестидесятипятилетнему юбилею журнала «Математика в школе». 1999. № 2. С. 75–80; *Курдюмова Н.А.* У истоков журнала «Математика в школе». 2004. № 5. С. 11–17. (Здесь и далее в ссылках название журнала не указывается.)



А.Н. Барсуков

1934-й год – это примерно середина периода стабилизации школьного образования, в том числе математического. Начался он в 1931 г. знаменитым постановлением ЦК ВКП(б) «О начальной и средней школе», а закончился в 1938 г. пересмотром программ по математике и заменой некоторых учебников. К 1934 г. было сделано уже многое: взамен комплексных программ 1920-х гг. были созданы программы для систематического изучения предметов, многочисленные рабочие книги и краевые учебники заменены едиными стабильными учебниками, впервые в СССР написаны предметные методики по арифметике, алгебре и геометрии.

Полным ходом шла централизация методического руководства практикой преподавания математики: если в 1920-е гг. учителя имели значительную свободу, то теперь их деятельность была ограничена и строго контролировалась завучами, директорами и районными методистами (которых в свою очередь контролировали областные чиновники, тех – чиновники из центра и т.д.). Сначала Наркомпрос РСФСР выпускал для педагогов серию инструктивно-методических писем, разъясняющих, как учитель должен строить свою работу по обучению и воспитанию. Затем по результатам каждого учебного года выходили инструктивно-методические материалы, в которых подводились итоги проделанной работе и ставились задачи на будущий год.

Однако, несмотря на колоссальные усилия руководителей системы народного образования, результаты были не слишком утешительными: успеваемость по основным предметам была невысокой. В постановлении Совнаркома РСФСР по результатам 1932/33 учебного года обращалось внимание на некоторые недостатки в преподавании. Эти недостатки связывались в первую очередь со слабой квалификацией большинства учителей, и Наркомпросу поручалось наладить систему переподготовки педагогов. В своем постановлении коллегия Наркомпроса более детально рассмотрела результаты работы школы в 1932/33 учебном году. В качестве одной из мер по ликвидации недостатков коллегией предложено следующее: «Возобновить издание журналов по отдельным дисциплинам с тем, чтобы в этих изданиях была обеспечена совершенно конкретная методическая помощь и руководство учителем»[4]. Таким образом, появление системы предметных методических журналов для учителей было естественным и неизбежным шагом, завершающим указанный процесс централизации руководства методической работой.

Являясь оперативным посредником между учителями, методистами и руководством Наркомпроса, предметный журнал по математике (и физике) оказался чрезвычайно удобен для ликвидации различных «прорывов». Так, в инструктивно-методических материалах неоднократно отмечалось, что учащиеся средней школы плохо решают алгебраические задачи на составление уравнений; и уже в № 2 и 3 журнала за 1934 г. напечатано три статьи, посвященные этому вопросу, а в № 5 за 1936 г. – 7 статей. Но, конечно, содержание журнала не ограничивалось только методическими статьями.

Рассмотрим историю журнала и его особенности в разные периоды времени.

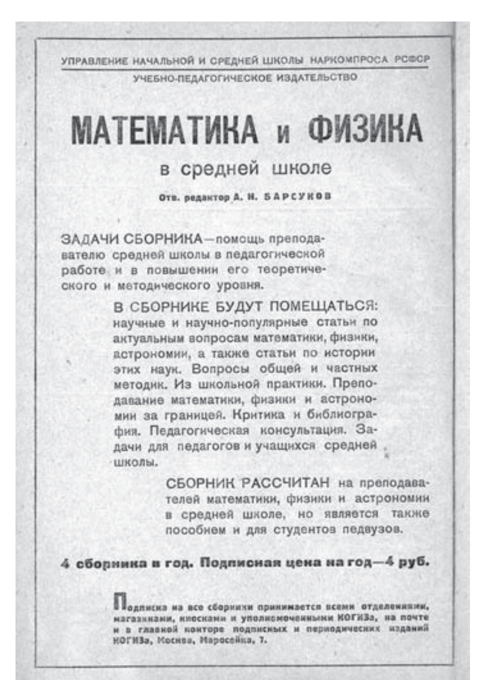
---

[4] Об итогах 1932/33 учебного года по преподаванию основных предметов в начальной и средней школе // Бюллетень Наркомпроса РСФСР. 1933. № 19. С. 11.

Первые шаги (1934–1941)

В первом номере журнала «Математика и физика в средней школе» за 1934 г. редакция поместила развёрнутую его программу. Предполагалось следующее содержание журнала: 1) научно-популярные статьи; 2) методические статьи; 3) сведения о преподавании за границей; 4) обзоры книг и рецензии; 5) задачи. Эти 5 пунктов говорят о том, что редакция сознательно или несознательно собиралась возродить дореволюционные традиции научно-популярных и методических журналов по математике (что ей со временем удалось сделать).

В первые два года издания каждый номер журнала открывался статьёй научно-популярного или исторического характера. Исключение делалось только для каких-то важных материалов вроде рассказа о 2-м Всесоюзном съезде математиков (1934, № 3) или статьи известного философа-марксиста В.Н. Молодшего «Энгельс и математика». С конца 1936 г. номера журналов стали открывать передовицы, которые помещались обычно без подписи. Их содержание отражало текущие политические процессы в области народного образования и в стране в целом. Первая передовица, помещенная в № 6 за 1936 г., была реакцией на постановление ЦК ВКП(б) «О педологических извращениях в системе Наркомпросов». Это постановление положило начало разгрому науки педологии и надолго затормозило развитие отечественных психолого-педагогических исследований. Мощному удару подверглись разнообразные методики определения способностей учащихся, которые использовали тестирование. Работа по созданию измерителей математических знаний велась в Институте политехнического образования Наркомпроса РСФСР под руководством Е.С. Березанской (часть материалов была опубликована, другая хранится в Научном архиве РАО). В упомянутой передовице приводятся некоторые публикации сотрудников института и указывается на их ошибочность. После этого вся работа по созданию измерителей была остановлена.



УПРАВЛЕНИЕ НАЧАЛЬНОЙ И СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ НАРКОМПРОСА РСФСР

УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

МАТЕМАТИКА и ФИЗИКА

в средней школе

Отв. редактор А. Н. БАРСУКОВ

ЗАДАЧИ СБОРНИКА—помощь преподавателю средней школы в педагогической работе и в повышении его теоретического и методического уровня.

В СБОРНИКЕ БУДУТ ПОМЕЩАТЬСЯ: научные и научно-популярные статьи по актуальным вопросам математики, физики, астрономии, а также статьи по истории этих наук. Вопросы общей и частных методик. Из школьной практики. Преподавание математики, физики и астрономии за границей. Критика и библиография. Педагогическая консультация. Задачи для педагогов и учащихся средней школы.

СБОРНИК РАССЧИТАН на преподавателей математики, физики и астрономии в средней школе, но является также пособием и для студентов педвузов.

4 сборника в год. Подписная цена на год—4 руб.

Подписка на все сборники принимается всеми отделениями, магазинами, киосками и уполномоченными КОГИЗа, на почте и в главной конторе подписных и периодических изданий КОГИЗа, Москва, Маросейка, 7.

Методический отдел журнала заработал в полную силу с первых же номеров журнала. Публиковались как материалы по частной методике, так и по общей. Был помещён ряд статей по вопросам преподавания в зарубежной школе. Всего этого, однако, не хватало учителям, и они обращались в редакцию с предложениями по развитию журнала.

Одно из таких писем было опубликовано[5]. Критик в целом остался доволен статьями методического характера, но предложил больше внимания уделить организации внеклассной работы, составлению годовых планов, воспитательной работе на уроках математики и др. Нарекания педагога вызвали некоторые научно-популярные статьи узкой направленности, мало интересные

---

[5] *Тарасов В.* Стать ближе к учителю. 1935. № 6. С. 117–119.

широкому кругу читателей. Критик обратил внимание на неудовлетворительное ведение библиографического отдела и призвал печатать обзоры выходящих книг для учителя. Также он посчитал необходимым публиковать результаты выпускных и переводных испытаний, образцы контрольных работ.

В ответе на письмо В. Тарасова редакция согласилась с основными замечаниями критика. При этом обращалось внимание на то, что пожелания разных педагогов о развитии журнала нередко противоположны, «причём одни письма (очевидно, более подготовленных педагогов) делают упор на углубление научного раздела, другие, наоборот – на конкретную методическую помощь начинающему педагогу...»[6]. Дополнительной трудностью являлось то, что журнал должен был помещать статьи не только по математике, но и по физике и астрономии.

Эту трудность хорошо понимали рядовые учителя; именно они предложили разделить журнал на два журнала – по физике и математике[7]. Указывалось на необходимость увеличения тиража. Педагоги предлагали печатать конспекты образцовых уроков, значительно расширить библиографический отдел. Интересные соображения высказали учителя о работе редакции с ними. Они предложили создать группы авторского актива, члены которых в своих регионах собирали бы ценные статьи и отправляли в журнал, а также помогали в написании статей учителям: «Ведь многие педагоги охотно дали бы свои статьи, у них огромный опыт, знания, но как начать статью – они порою не умеют, чем кончить её – они иногда не знают, и вот необходимо помочь им в этом»[8]. Эта мысль очень понравилась редакции. В ответе на статью Н.Н. Разумовского редакция еще раз подтвердила свое намерение заняться библиографическим отделом и сообщила о принятом решении разделить журнал на два журнала.



1937-й год проходил под знаком юбилея – 20-летия советской власти. Главный редактор А.Н. Барсуков поместил в № 6 ряд статей о Яснополянской школе, в которой он совместно с учительницей М.И. Змиевой разрабатывал методику решения уравнений (эти разработки затем легли в основу его книги «Уравнения первой степени в средней школе»). Этот номер стал самым толстым за всю историю журнала «Математика в школе» – 152 страницы и приложение. Одновременно с юбилеем репрессии близились к своему пику, что нашло отражение в ряде передовиц того времени. Наконец, в 1937 г. была развернута кампания по критике существующих стабильных учебников.

Тягостное впечатление производят и передовицы следующего 1938 года. В это время был

---

[6] Ответ т. Тарасову. Там же. С. 119.

[7] *Разумовский Н.Н.* Замечания педагогов по журналу «Математика и физика в школе». 1936. № 5. С. 88–90.

[8] Там же. С. 89.

окончательно разгромлен так называемый «право-троцкистский блок» (см. № 2 за 1938 г.) и наступило некоторое затишье: передовицы помещаются уже не в каждом номере, а содержание их носит не столь агрессивный характер.

1938 год стал непростым для учителей математики: менялись программы и учебники. При этом никакого предварительного обсуждения на страницах журнала не было. Педагогов поставили перед фактом: группа учёных-математиков решила, что программы и учебники неудовлетворительны и подлежат переработке или замене. Работа по пересмотру программ велась параллельно преподавателями вузов из Ленинграда (Б.Н. Делоне, В.А. Тартаковский и др.) и научными сотрудниками Управления школ и Института школ Наркомпроса в Москве (А.С. Пчёлко, Н.Н. Никитин и др.). Работа шла непросто: методисты доказывали, что многие изменения неприемлемы, а математики настаивали на своём. В результате были составлены компромиссные варианты программ для начальной (1938 г.) и средней школы (1937 г.). Оба варианта активно критиковались в 1938 г. на страницах журнала «Математика в школе». Правда, эта критика не привела к значительным изменениям составленных программ. По сути, серьёзное изменение было только одно: к программе средней школы была добавлена объяснительная записка[9].

В 1938 г. редакция, наконец, смогла выполнить своё обещание о развитии библиографического отдела: его стал вести тогда ещё совсем молодой С.И. Новосёлов, впоследствии заместитель главного редактора, известный педагог-математик. За 1937–1941 гг. он поместил несколько десятков аннотаций новых книг.

Было учтено и другое пожелание учителей – публиковать статьи с обзором результатов экзаменов и методическими рекомендациями по подготовке к ним (1938, № 3). Стали помещаться заметки о прошедших мероприятиях – семинарах, математических кружках. Впервые в журнале появились статьи о коммунистическом воспитании на уроках математики (1938, № 4).

Хотя было очевидно, что журнал поступательно развивался, нашлись новые критики его деятельности и содержания. Таким критиком стал А.Я. Хинчин – математик, редактор учебника А.П. Кисёлева «Арифметика», в 1938–1940 гг. заведующий кабинетом математики Института школ Наркомпроса РСФСР. В своём отзыве он обрушился с критикой: «Редакция не является организационным центром, движущим линию журнала по своему плану и усмотрению: по всем важнейшим направлениям журнал предоставлен самотёку, в который редакция лишь иногда, лишь в виде исключения вносит небольшие комментирующие штрихи, и то не всегда удачные»[10].



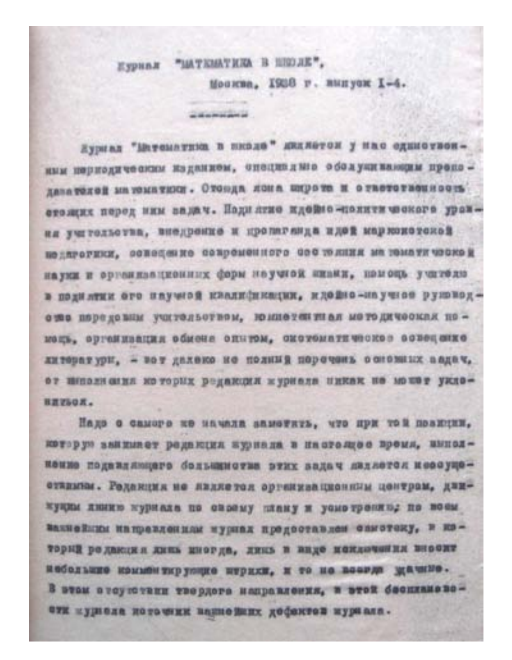
А.Я. Хинчин

А.Я. Хинчин приветствовал перепечатку в передовицах речей И.В. Сталина и призвал ещё больше политизировать журнал, помещая, в частности, педагогические

---

[9] Подробнее см.: *Бусев В.М.* Реформы школьного математического образования в 1930-е гг. // Историко-математические исследования. 2008. № 48. С. 154–184.

[10] [Отзыв А.Я. Хинчина на номера 1–4 журнала «Математика в школе» за 1938 год] // Научный архив РАО. Ф. 15. Оп. 1. Д. 1323. Л. 44.



Журнал "МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ",
Москва, 1938 г. выпуск 1-4.

Журнал "Математика в школе" является у нас единственным периодическим изданием, специально обслуживающим преподавателей математики. Отсюда ясна широта и ответственность стоящих перед ним задач. Поднятие идейно-политического уровня учительства, внедрение и пропаганда идей марксистской педагогики, освещение современного состояния математической науки и организационных форм научной жизни, помощь учителю в поднятии его научной квалификации, идейно-научное руководство передовым учительством, компетентная методическая помощь, организация обмена опытом, систематическое освещение литературы, – вот далеко не полный перечень основных задач, от выполнения которых редакция журнала никак не может уклониться.

Надо с самого же начала заметить, что при той позиции, которую занимает редакция журнала в настоящее время, выполнение подавляющего большинства этих задач является неосуществимым. Редакция не является организационным центром, движущим линию журнала по своему плану и усмотрению; по всем важнейшим направлениям журнал предоставлен самотеку, в который редакция лишь иногда, лишь в виде исключения вносит небольшие комментирующие штрихи, и то не всегда удачно. В этом отсутствии твердого направления, в этой бесплановости журнала источник важнейших дефектов журнала.

Первый лист отзыва А.Я. Хинчина на журнал «Математика в школе»

высказывания основоположников марксизма-ленинизма. Наиболее слабым критиком признан научно-популярный отдел, который, по его мнению, не делал ничего для освещения современной математической науки, давая учителю лишь разрозненные и не связанные между собой заметки.

Методический отдел А.Я. Хинчин критиковал за низкий идейный уровень: «Почти никогда методическая проблема не выносится на принципиальную высоту, не поднимается над чисто эмпирической трактовкой, не ставится в связь с общими принципами педагогики. Часто говорится о мелочах, вплоть до рецептов изготовления цветных мелков, помещаемых в середине серьёзной статьи по методике геометрии»[11]. А.Я. Хинчин выступал за организацию методических дискуссий на страницах журнала, предлагал редакции руководить этими дискуссиями, помещая статьи с разными точками зрения и комментируя их.

Нарекания критика вызвал также библиографический отдел – за поверхностность помещаемых аннотаций.

Единственное, чем остался доволен А.Я. Хинчин, – отдел задач.

Замечания критика были частично учтены редакцией. Произошло это, конечно, не сразу и не без влияния самого А.Я. Хинчина, поместившего до войны несколько программных и методических статей (1939, № 4, 5; 1939, № 6 и др.). Затем были опубликованы статьи А.И. Фетисова, выступавшего за перестройку курса геометрии на основе идеи геометрического преобразования (1940, № 4, 5, 6). Наконец, в журнале были опубликованы главы учебника алгебры А.Н. Колмогорова и П.С. Александрова (1941, № 2, 3). Методические статьи в большинстве своём продолжали оставаться «рецептурными», серьёзных изменений библиографический отдел не претерпел. На чётвертом номере за 1941 г. журнал временно перестал выходить – началась война.

Подводя итог деятельности журнала в первый период его существования, можно сказать с уверенностью: журнал был востребован. С помощью читателей он старался идти в ногу со временем, отвечать на запросы дня. Рядовые педагоги положительно отзывались о методическом отделе, и это является более весомым для оценки журнала, чем умозрительные рассуждения А.Я. Хинчина, не понимавшего, по всей видимости, что массовому учителю нужна не принципиальность и высокая идейность, а рабочий материал, с которым он может идти на урок. Научно-популярный отдел, как мы видели выше, не устраивал никого, и эту задачу предстояло решить в будущем. Библиографический отдел также нуждался в развитии: аннотация и серьёзная рецензия – далёкие друг от друга вещи. О том, как редакция справлялась с этими трудностями, мы расскажем ниже.

---

[11] Там же. Л. 47.

Период стабильности (1946–1957)

Ещё во время войны произошло знаменательное событие – была основана Академия педагогических наук РСФСР (1943 г.). Одним из инициаторов её создания был А.Я. Хинчин, который затем принимал участие в работе сектора методики математики. Сотрудниками сектора были известные личности: И.В. Арнольд, П.С. Александров, В.Л. Гончаров, Я.С. Дубнов, А.И. Маркушевич, Н.Ф. Четверухин и др. Очевидно, что уже один состав сектора говорит о серьёзных претензиях его сотрудников на политику в области школьного математического образования. Журнал «Математика в школе», будучи проводником этой политики, не мог, конечно, остаться неизменным.

И действительно, в передовице первого послевоенного номера помещена программа развития журнала, из которой вполне понятны намерения редакции, а также тех лиц, которые формально к редакции отношения не имели, но влияли на работу журнала; в первую очередь это А.Я. Хинчин. Так, в программе журнала заявлена тема борьбы с формализмом знаний учащихся – одна из любимых тем А.Я. Хинчина.

В чётких указаниях о содержании научно-популярного отдела так же нетрудно угадать руководящую роль этого математика. Согласно приведённым указаниям, в научно-популярном отделе должны помещаться статьи трёх типов: 1) посвящённые современной математике; 2) по элементарной математике; 3) по истории математики. Отмечено, что материалы научно-популярного отдела помещаются не только для чтения их учителем, но и для использования во внеклассной работе с учащимися.

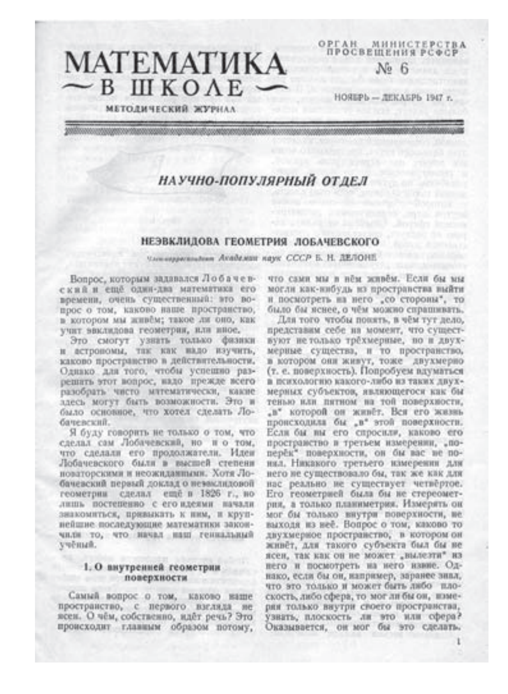


С.И. Новоселов

Изменения коснулись и состава лиц, которые отвечали за журнал. Заместителем редактора стал С.И. Новосёлов, а членами возрожденной спустя почти десятилетие редколлегии – профессора Н.Ф. Четверухин и В.В. Немыцкий. Первый из них ещё до революции, а затем и после революции сотрудничал в журнале «Математическое образование», был автором программ и учебников по курсу высшей геометрии для педагогических вузов. Второй не имел никакого отношения к школе и был введён в состав редколлегии, вероятно, для повышения «научной идейности» журнала – то, чего так настойчиво добивался А.Я. Хинчин еще в конце 1930-х гг.

Все отмеченные события немедленно повлияли на журнал. В научно-популярном отделе были опубликованы статьи А.Д. Александрова «Что такое топология» (1946, № 1), П.С. Александрова «Научные основы школьного курса алгебры» (1946, № 4, 5–6), В.В. Немыцкого «Понятие множества в современной математике» (1947, № 2) и др. Планомерно помещались статьи по истории математики: В.Н. Молодшего «Понятие комплексного числа в его развитии» (1947, № 2), А.К. Сушкевича «Обозначения чисел у разных народов» (1948, № 2) и цикл статей А.П. Юшкевича по истории математики в России (1947–1949 гг.).

В методическом отделе был опубликован ряд статей о борьбе с формализмом в знаниях учащихся (1946, № 3), о тематике арифметических задач (1946, № 2), об устной работе на уроках математики (1946, № 4), о проблеме первых уроков геометрии (1947, № 4); прошла интересная дискуссия о том, в каком классе начинать систематический курс геометрии (1948, № 1, 6; 1949, № 1).



МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ

МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ОРГАН МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР

№ 6

НОЯБРЬ — ДЕКАБРЬ 1947 г.

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ОТДЕЛ

НЕЭВКЛИДОВА ГЕОМЕТРИЯ ЛОБАЧЕВСКОГО

Членкорреспондент Академии наук СССР Б. Н. ДЕЛОНЕ

Вопрос, которым задавался Лобачевский и ещё один-два математика его времени, очень существенный: это вопрос о том, каково наше пространство, в котором мы живём; такое ли оно, как учит эвклидова геометрия, или иное.

Это смогут узнать только физики и астрономы, так как надо изучить, каково пространство в действительности. Однако для того, чтобы успешно разрешить этот вопрос, надо прежде всего разобрать чисто математически, какие здесь могут быть возможности. Это и было основное, что хотел сделать Лобачевский.

Я буду говорить не только о том, что сделал сам Лобачевский, но и о том, что сделали его продолжатели. Идеи Лобачевского были в высшей степени новаторскими и неожиданными. Хотя Лобачевский первый доклад о неэвклидовой геометрии сделал ещё в 1826 г., но лишь постепенно с его идеями начали знакомиться, привыкать к ним, и крупнейшие последующие математики закончили то, что начал наш гениальный учёный.

1. О внутренней геометрии поверхности

Самый вопрос о том, каково наше пространство, с первого взгляда не ясен. О чём, собственно, идёт речь? Это происходит главным образом потому, что сами мы в нём живём. Если бы мы могли как-нибудь из пространства выйти и посмотреть на него „со стороны", то было бы яснее, о чём можно спрашивать.

Для того чтобы понять, в чём тут дело, представим себе на момент, что существуют не только трёхмерные, но и двухмерные существа, и то пространство, в котором они живут, тоже двухмерно (т. е. поверхность). Попробуем вдуматься в психологию какого-либо из таких двухмерных субъектов, являющегося как бы тенью или пятном на той поверхности, „в" которой он живёт. Вся его жизнь происходила бы „в" этой поверхности. Если бы вы его спросили, каково его пространство в третьем измерении, „поперёк" поверхности, он бы вас не понял. Никакого третьего измерения для него не существовало бы, так же как для нас реально не существует четвёртое. Его геометрией была бы не стереометрия, а только планиметрия. Измерять он мог бы только внутри поверхности, не выходя из неё. Вопрос о том, каково то двухмерное пространство, в котором он живёт, для такого субъекта был бы не ясен, так как он не может „вылезти" из него и посмотреть на него извне. Однако, если бы он, например, заранее знал, что это только и может быть либо плоскость, либо сфера, то мог ли бы он, измеряя только внутри своего пространства, узнать, плоскость ли это или сфера? Оказывается, он мог бы это сделать.

1

Отметим, что за 1946–1949 гг. в журнале было помещено всего две передовых статьи. При этом, как мы видели, оживилась методическая работа, а математики стали активно и, в отличие от 1930-х гг., планомерно влиять на содержание журнала. Всё это вкупе с победной эйфорией советского народа говорит о проблеске света в мрачной сталинской эпохе, о глотке свободы. Свобода же после долгих лет гнёта естественно приводит к желанию перемен. И перемены предполагались в обучении математике: в 1947 г. группой сотрудников сектора методики обучения математике АПН РСФСР был составлен проект программ, основной идеей которого было сближение школьной математики с математикой последних столетий. Однако программой проект не стал, причины чего в литературе по истории математического образования не указываются. Вероятно, этого не случилось потому, что недолгий период свободы быстро кончился, и реформы стали невозможны, а их инициирование – небезопасно.

После войны активно развивалось олимпиадное движение. Первые олимпиады по математике были проведены ещё в 1934 и 1935 гг. в Ленинграде и Москве. Затем олимпиады стали проводиться и в других городах. Мы не можем указать точные даты, когда это произошло, но на страницах журнала «Математика в школе» опыт их организации стал освещаться с 1949 г. Впервые была проведена несколько необычная олимпиада – по арифметике (см. 1950, № 5). В дальнейшем олимпиады различных типов и уровней стали неотъемлемой частью школьного математического образования.

На время стабильности приходится расцвет истории отечественного математического образования, что нашло отражение на страницах журнала. Резкий рост интереса к этой области знания был связан, по всей видимости, с кампанией по борьбе с космополитизмом: практически во всех названиях статей и диссертаций есть слово «русский» (например: «Тригонометрия в русской и советской средней школе»). Никого, по всей видимости, не смущал тот факт, что многие дореволюционные и советские методисты не были русскими. Как бы там ни было, но в результате мы имеем значительное число фундаментальных исследований, выполненных в начале 1950-х гг. и (частично) опубликованных в журнале «Математика в школе».

В 1948 г. была заложена традиция публикации ежегодных отчётов средних специальных и высших учебных заведений о результатах приёма абитуриентов. Отдельные сведения такого характера помещались ещё в середине 1930-х гг., но регулярными публикации тогда не стали. За период 1948–1951 гг. помещено около 20 отчётов. Причины их появления заключались, вероятно, в том, что всё большее число оканчивающих семилетку или десятилетку собирались продолжить образование, и школе приходилось ориентироваться на требования учебных заведений следующей ступени.

К началу 1950-х гг. редакции удалось решить проблему библиографического отдела. Краткие аннотации С.И. Новосёлова уступили место развёрнутым рецензиям разных авторов на вышедшие книги. Помимо рецензий редакция два раза в год помещала списки новых книг и статей[12].

Также регулярно вёлся отдел хроники, где помещались краткие сообщения о проведенных мероприятиях.

В 1950 г. появилась новая форма публикации материалов, поступающих в редакцию, которая получила название «Из писем и заметок читателей». В этой рубрике помещались фрагменты писем и статей читателей, которые редакция по каким-либо причинам полностью не публиковала. Обзоры составляли К.С. Богушевский и К.С. Барыбин. Пик развития рубрики «Из писем и заметок читателей» приходится на конец 1950-х – начало 1960-х гг., затем она исчезает.

В марте 1953 г. произошло чрезвычайное событие – умер И.В. Сталин. Второй номер журнала уже был подписан в печать, и пришлось срочно делать вклейку с портретом вождя и кратким некрологом. В этом же номере была опубликована передовая статья «Политехническое обучение в советской школе», которая являлась реакцией на директивы XIX съезда КПСС. Хотя идея трудовой школы была отвергнута в 1930-е гг., школу долго ещё называли политехнической, не забывая противопоставлять её «схоластической» дореволюционной гимназии. Периодически делались попытки что-то изменить в направлении сближения школы с жизнью, но попытки эти были вялыми и серьёзно повлиять на ситуацию не могли.

На XIX съезде КПСС (1952 г.) снова зашёл разговор о сближении школы с жизнью, что постепенно отразилось на содержании журнала. Так, уже в начале 1953 г. были помещены статьи М.Г. Васильева «О приближённых вычислениях в старших классах» и П.А. Ларичева «Арифметические задачи как фактор политехнического обучения» (обе 1953, № 2). Затем вышла большая статья С.А. Пономарева «К вопросу о политехническом обучении в преподавании математики» (1953, № 3) и указатель статей по проблеме политехнического обучения (в том же номере). В дальнейшем редакция помещала статьи о решении задач с производственной тематикой пищевого профиля, о вычислении объёма сена в стогах, о методике работы с логарифмической линейкой, о проведении измерительных работ на местности и даже об экскурсиях на производство. Так начиналось новое время – время Реформ.

(*Продолжение следует.*)

Вернуться к содержанию

[12] Сначала их составлял В.А. Невский, а затем до 1992 г. Ф.М. Шустеф, создавшая на их основе ряд тематических указателей; некоторые из них доступны на сайте http://www.mathedu.ru/bibliography.

Циклическая периодизация истории школьного математического образования



Галина Вячеславовна КОНДРАТЬЕВА
доцент кафедры геометрии
Московского государственного
областного университета
kondratevagv@mail.ru

Введение

В первом номере журнала «Полином» за 2009 год была опубликована статья Т.С. Поляковой, поднимающая исключительно важные, на наш взгляд, вопросы периодизации школьного математического образования. В современной отечественной науке существуют различные варианты периодизаций: Ю.М. Колягина[1], О.А. Саввиной[2], О.В. Тарасовой[3], Р.С. Черкасова[4] и других. Т.В. Киселёва в своей статье провела сравнительный анализ перечисленных периодизаций[5].

Учитывая значимость темы, нам кажется целесообразным продолжить обсуждение и предложить ещё одну периодизацию (первоначальный её вариант был опубликован в 2006 г.). Данная периодизация имеет ряд отличительных особенностей (в частности, не рассматривает 1917 г. как смену этапов в развитии школьного математического образования).

На наш взгляд, роль периодизации в исторических исследованиях часто недооценивается: она служит скорее вспомогательным элементом, позволяющим лучше структурировать работу и способствовать раскрытию темы. Но возможности периодизации в историческом исследовании могут быть значительно шире: именно в периодизации должны находить свое отражение существующие закономерности развития школьного математического образования. Ведь изучая события прошлого, важно реализовать объяснительную функцию по отношению к настоящему и прогностическую по отношению к будущему. И инструментом здесь может стать периодизация развития школьного математического образования.

Мы сознаём уязвимость предлагаемой нами периодизации. Любая периодизация строится на огромном фактическом материале, который к тому же из-за ограниченного объёма статьи не может быть приведён полностью. Понятно, что

---

[1] *Колягин Ю.М.* Русская школа и математическое образование: Наша гордость наша боль. М.: Просвещение, 2001.

[2] *Саввина О.А.* Исторические очерки о преподавании высшей математики в средних учебных заведениях России. В 2-х ч. Елец: ЕГУ, 2002.

[3] *Тарасова О.В.* Становление и развитие геометрического образования в дореволюционной средней школе России / Автореф. дисс... доктора пед. наук. Елец, 2006.

[4] *Черкасов Р.С.* История отечественного школьного математического образования // Математика в школе. 1997. № 4–6.

[5] *Киселёва Т.В.* Проблема периодизации в исследованиях по истории математического образования // Вестник Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина. Вып. 11. Серия «История и теория математического образования». 2006. С. 132–140.

при отборе и систематизации фактов неизбежны упущения, натяжки, неправомерные экстраполяции и другие ошибки. Но, решившись на публикацию этой статьи, мы преследуем цель усилить работу по выявлению закономерностей развития отечественной школы, а также активизации дальнейших поисков приемлемой объяснительной модели истории совершенствования как нашей школы в целом, так и математического образования в частности.

В предлагаемой периодизации развитие школьного математического образования рассматривается как циклический процесс, состоящий из законченных периодов. Под периодом здесь понимается временной промежуток, обладающий повторяемостью выделенных фаз и необратимостью произошедших изменений в системе. Каждая фаза представляет собой единицу хронологической классификации, в ходе которой идёт процесс решения характерных, особенно значимых именно для неё задач. Такой процесс рассматривается нами в качестве основания классификации. Нами выделено 5 фаз периодизации:

1. ***Предреформенная***, в которой происходит осознание обществом существующих противоречий и необходимости их разрешения, имеет место выдвижение новаторских идей, усиление неустойчивости системы.

2. ***Реформаторская***, на протяжении которой идёт внесение кардинальных изменений в нормативно-правовую базу школьного образования.

3. ***Экспериментально-эклектическая***, характеризующаяся массовым внедрением новаций в практику школы.

4. ***Структурно-организационная***, которую отличает отказ от неприжившихся новаций, усиление тенденции к устойчивости системы.

5. ***Инерционно-развивающаяся*** определяется состоянием стагнации и накоплением новых противоречий.

При этом нельзя, конечно, утверждать, что, например, на структурно-организационной фазе не выдвигается новых идей. Но они отходят здесь на второй план, так как решаются другие, более актуальные задачи. Чистая хронология в этом случае размыта, переходы от одной фазы к следующей происходят плавно, без скачков, и занимают некоторое время, иногда значительное. Например, нельзя сказать, что ровно 26 июня 1906 г. началась новая фаза, поскольку именно в этот день были утверждены дополнения к программам реальных училищ, которые вводили основы анализа бесконечно малых.

Кратко проиллюстрируем данную модель на конкретном историческом материале, начиная с середины XIX века.

Первая фаза, предреформенная (1852–1861)

Начало данной фазы обозначено нами как подведение итогов всего предыдущего периода, оно связано с публикацией соответствующих нормативно-законодательных документов. В данном случае таким документом является постановление, вводившее вместо двух типов гимназий, установленных в 1849 г., три типа: 1) с естественной историей и законоведением; 2) только с законоведе-

нием; 3) с латинским и греческим языками. В принципе данное постановление не утверждало ничего кардинально нового, оно лишь несколько варьировало старую структуру.

Фаза характеризуется значительным ростом общественной активности. После Крымской войны 1853–1856 гг. начали широко обсуждаться проблемы школы (например, дискуссия по статье «Вопросы жизни» Н.И. Пирогова в журнале «Морской сборник»), появились частные педагогические журналы («Журнал для воспитания», «Русский педагогический вестник», «Учитель»), создано первое в России педагогическое общество – С.-Петербургское (1859).

Вторая фаза, реформаторская (1862–1865)

Декларируемые обновления закрепляются в документах. Начало фазы ознаменовано достаточно передовым для своего времени проектом Устава гимназий (1862; утверждён с изменениями в 1864), а также основные положения реформы военно-учебных заведений и новые учебные планы женских институтов (1863). Возрастает активность частных лиц (пожертвования на стипендии, организация школ и т.п.).

Идут работы по обновлению существующей практики обучения математике: внедряются новые методы обучения (метод беседы), получают распространение репетиции (особая форма организации контроля знаний).

Происходит обновление целей обучения математике: ставится задача воспитания в процессе обучения. Методистами активно разрабатываются вопросы преподавания арифметики. На повестку дня ставятся вопросы построения приготовительных и элементарных курсов геометрии[6]. Начинается широкая дискуссия по вопросам преподавания математики в журналах «Педагогический вестник», «Журнал для воспитания», «Учитель». Спектр затрагиваемых вопросов постоянно расширялся, особенно интенсивно обсуждались проблемы начального обучения, постановка преподавания математики в женских учебных заведениях.

Третья фаза, экспериментально-эклектическая (1866–1870)

Гимназии начинают функционировать согласно Уставу 1864 г. Внешние политические факторы (покушение на Александра II и вступление в должность министра народного просвещения Д.А. Толстого) способствуют усилению движения системы в сторону устойчивости, что на практике выразилось в ограничении преподавания естественно-научных дисциплин.

Содержание курса математики в средних учебных заведениях стабильно. Активно используются зарубежные наглядные пособия, особенно в начальной школе (таблицы Песталлоци, арифметический ящик и т.д.). На смену господствовавшей ранее зубрёжке теории приходит решение задач.

---

[6] Под *приготовительным курсом* геометрии нами понимается вводный курс, который предполагает дальнейшее систематическое изучение предмета. Под *элементарным курсом* понимается упрощённый курс, который предназначался, например, для народных школ и сельских училищ; в таких курсах материал давался наглядно, практически без доказательств и данным курсом завершалось знакомство с предметом.

Разрабатываются приготовительные курсы алгебры, геометрии, практикуются геодезические работы на местности. Активно используются немецкие методики обучения (метод А. Грубе).

Четвертая фаза, структурно-организационная (1871–1880)

Сворачиваются попытки создания полноценной реальной школы. В начале 1870-х гг. устанавливается классическая гимназия (время на изучение древних языков без учёта приготовительного класса достигает 41%[7], окончание которой даёт право на поступление без экзаменов в университет. Реальные гимназии заменяются неполноценными реальными училищами, которые, с одной стороны, не дают возможности выпускникам поступать в университет, а с другой – принципиально меняют подход к преподаванию математики. Здесь значительно усиливается прикладная направленность преподавания, снижается доказательная составляющая курса. Усиливается строгость контроля (Правила об испытаниях 1872 г.).

Значительно увеличивается число часов на изучение математики в гимназиях. В 1871 г. выходят первые общегосударственные официальные программы по математике для гимназий, закрепившие традиционный курс: арифметика, алгебра, геометрия, тригонометрия. Затем выходят программы и планы для реальных училищ (1873) и женских гимназий (1874). Проявляется тенденция к увеличению номенклатуры учебных пособий.

Методику математики отличает дальнейшая разработка уже существующих направлений и течений. Выходят новые методические руководства для учителей (Е.Е. Волков, З.Б. Вулих, В.А. Евтушевский). Важной чертой этого времени стала борьба против засилья немецких методов в обучении, выразившаяся, в частности, в дискуссии В.А. Евтушевского и Л.Н. Толстого и имевшая большое значение для дальнейшего развития отечественной методики арифметики.

Пятая фаза, инерционно-развивающаяся (1881–1890)

Рубеж между четвёртой и пятой фазами связан нами с убийством Александра II (1881), которое привело к резкой смене политического курса. Правомерен вопрос о корректности прямой связи политических изменений и развитием школы. Мы рассматриваем систему школьного образования как достаточно самостоятельную и в большой степени независимую от внешних (политических, экономических и т.п.) обстоятельств. Но в данном случае факт убийства императора представляет собой не столько причину, сколько повод для резких изменений в сфере образования. Знаковое событие (убийство императора) дало возможность легко осуществить уже созревший в недрах системы переход к инерционно-развивающейся фазе.

Снижается активность общественности и частных лиц: материальная помощь учебным заведениям в форме стипендий ослабевает, но частные журналы продолжают создаваться и выходить.

---

[7] См.: Полное собрание законов Российской империи. Собрание 2-е. СПб., 1874. Т. 46. Отд. 3. Штаты и табели. К № 49860.

Содержание курса математики стабильно. Усиливается роль теории, причем в курсах не только средних, но и начальных учебных заведений.

Проводятся работы над созданием систематических курсов, которые разумно сочетали бы научность с доступностью изложения. Ставится вопрос о методической разработке систематических курсов[8].

Создание новых учебников (А.П. Киселёв), задачников (Н.А. Шапошников, Н.К. Вальцов) проходит одновременно с замедлением роста номенклатуры выпускаемой учебной литературы[9].

Конец фазы характеризует усиливавшаяся реакция в сфере образования. В 1887 г. выходит знаменитый циркуляр Министерства народного просвещения, который предписывал директорам гимназий воздерживаться от приема детей низших сословий. Практически одновременно прекращено государственное финансирование приготовительных классов, что уменьшило доступность образования для детей из необеспеченных семей, которые не могли получить первоначальную подготовку к средней школе дома. Развернувшаяся ограничительная политика в области образования в конце рассматриваемой фазы не могла способствовать развитию теории и практики обучения математике.

В то же время необходимо отметить, что оценивать данную фазу в целом как регрессивную для школьного математического образования было бы ошибочно. Именно в течение этой фазы шёл процесс совершенствования подходов к обучению, оттачивалась методика преподавания. Но наряду с решением частных вопросов накапливались новые проблемы, которые будут рассматриваться уже на следующем этапе.

Таким образом, заканчивался полный цикл развития системы школьного математического образования, на протяжении которого была создана традиционная система школьного математического образования. Начинается развитие нового цикла.

Первая фаза, предреформенная (1891–1905)

Начало фазы связано с новой программой гимназий (1890), снижающей время на изучение древних языков, вносящей некоторые изменения в преподавание русского языка и Закона Божего, но подтверждающей, тем не менее, лидирующее положение классической гимназии. Все эти изменения, зафиксированные законодательно, не были принципиальными, они только несколько варьировали, но одновременно и закрепляли итоги развития предыдущего этапа. А вот в области общественной инициативы явно имел место подьём активности.

Так, активизируются дискуссии по проблемам образования. В частности, предлагается создать новые типы школ и реорганизовать существующие, децентрализовать управление школьным образованием, сделать школу более свободной и

[8] Показательно в этом отношении усиление внимания методистов к тригонометрии, проявившееся, в частности, в выделении тригонометрического задачника как самостоятельного учебного пособия. Первый такой задачник издан В.П. Мининым (1881).

[9] Этот факт подтверждается данными, рассчитанными автором по книге: *Агапов Д.В.* Алфавитный каталог русских книг по математике, вышедших в России с начала книгопечатания до последнего времени (1682–1908). Оренбург, 1908.

комфортной для учащихся и учащих. Изъяны средней школы осознаются высшим руководством страны, активизируются попытки их устранения.

Для школьного математического образования характерна пока ещё стабильность содержания. Вместе с тем предлагается модернизация школьного курса математики: исключение сложных и малоценных с точки зрения практики и развития учащихся материала, повышение внимания к решению задач на доказательство. Одновременно начинается движение за реформу школьного курса математики (введение элементов высшей математики, постановка новых целей обучения, усиление прикладной составляющей).

Вторая фаза, реформаторская (1906–1922)

Работа над обновлением системы образования осложнялась влиянием внешних факторов: Русско-японская война, события 1905–1907 гг. Последовавший затем семилетний промежуток мирной жизни стал временем интенсивного развития и, может быть, оказался бы значительно более результативным, если бы не был прерван Первой мировой войной. Февральская и Октябрьская революции, гражданская война с голодом и разрухой также не способствовали выдвижению проблем образования на первый план. Неблагоприятным влиянием внешних факторов объясняется нетипично растянутая продолжительность фазы.

Начало фазы связано с введением новых программ по математике для реальных училищ, в которые были включены элементы высшей математики. Программы гимназий подверглись изменениям значительно позже – только в 1914 г. Основное изменение – уменьшение доли древних языков и одновременно увеличение времени на изучение предметов естественно-математического цикла.

Очередная попытка провести реформу была предпринята в 1915 г. министром П.Н. Игнатьевым. Школа должна была стать: 1) национальной; 2) самодовлеющей, т.е. дающей общее среднее образование и не имеющей непосредственной целью подготовку к продолжению образования в высших учебных заведениях; 3) состоящей из двух ступеней: первой с трёхлетним и второй с четырёхлетним курсом обучения. Предполагалось создать три типа средней школы: новогуманитарную, гуманитарно-классическую и реальную. Для всех типов математика была обязательным предметом.

Многое из предложенного проектом данной реформы было заимствовано большевиками в первые годы советской власти. Комплекс положений и декретов 1917–1918 гг. сформировал законодательную базу для единой трудовой средней школы с двумя ступенями, которая провозглашалась бессословной, светской, бесплатной. Отменяются домашние задания, отметки, ликвидируется классно-урочная система, исключаются наказания для учащихся.

Пересматриваются цели обучения математике: ставится задача практической и прикладной направленности курса (В.В. Лермантов, И.И. Чистяков), обновляются принципы обучения математике (С.И. Шохор-Троцкий). Методистами активно разрабатываются новые направления в основном в духе международного движения за

реформу: обогащение курсов понятиями функциональной зависимости, элементами математического анализа, аналитической геометрии. Среди педагогической общественности начинается широкая дискуссия по вопросам преподавания математики (в том числе, на Всероссийских съездах преподавателей математики).

Третья фаза, экспериментально-эклектическая (1923–1930)

Эта фаза связана с массовым переходом на беспредметное обучение в школе I ступени. В 1923 г. президиум Государственного учёного совета принял решение о переходе на комплексную систему обучения, согласно которой весь подлежащий изучению материал разбивался на отдельные темы – комплексы, которые прорабатывались, привлекая сведения из разных дисциплин. Снижается роль теории в обучении. Практикуются такие формы обучения, как бригадно-лабораторный метод, дальтон-план, экскурсии, метод проектов.

Появляются первые методики обучения математике, ориентированные на работу по комплексным программам (А.М. Воронец, А.В. Ланков), а также новые учебники и задачники (А.М. Воронец, И.И. Грацианский, В.В. Добровольский, А.В. Ланков), отражающие практику социалистического строительства.

Предложенные новации, как выяснилось на практике, не способствовали полноценной подготовке учащихся средней школы. В целом было зафиксировано снижение уровня математического образования.

Четвертая фаза, структурно-организационная (1931–1936)

Серия постановлений ЦК ВКП(б) 1931–1933 гг. остановила проведение массовых экспериментов в школе и обозначила переход к структурно-организационной фазе. Была возвращена классно-урочная система, введены стабильные программы и учебники, экзамены, установлена основополагающая роль математики в школьном образовании.

Содержание школьного курса математики возвращается к дореволюционным гимназическим традициям: деление на предметы арифметику, алгебру, геометрию и тригонометрию; построение курса геометрии в духе Евклида; повышенное внимание в курсе арифметики к решению сложных арифметических задач с псевдопрактическими сюжетами и к решению задач на вычисление в курсах геометрии и тригонометрии; отсутствие пропедевтического курса геометрии; деление курса геометрии на планиметрию и стереометрию.

Вместе с традиционным курсом математики возвращаются и традиционные учебники: А.П. Киселёва, Н.А. Шапошникова и Н.К. Вальцова, Н.А. Рыбкина.

Пятая фаза, инерционно-развивающаяся (1937–1948)

Данную фазу характеризует устойчивость системы, стабильность содержания, особое внимание к организационной стороне преподавания, стремление к усилению контроля. Последнее находит воплощение, в частности, в переходе к цифровой системе оценок и создании регламента поощрений и наказаний (1944).

Содержание математического образования стабильно. Отдельные изменения в программы вносятся в 1939–1940 гг. (измерения на местности), в 1943 г. (практические работы).

В конце фазы появляются первые признаки скорого наступления новой фазы, предреформенной. В 1943 г. создана Академия педагогических наук РСФСР, через год в её составе образован Научно-исследовательский институт методов обучения. Кабинет методики математики этого института объединил известных педагогов-математиков сторонников реформы: И.В. Арнольда, Я.С. Дубнова, А.И. Маркушевича, А.Я. Хинчина и др. В 1947 г. разработано два проекта новой программы по математике, в одном из которых (подготовленном сотрудниками кабинета методики математики АПН РСФСР) сделана попытка приблизить школьную математику к современной математике.

Первая фаза, предреформенная (1949–1963)

Законодательно оформленный переход к всеобщему обязательному семилетнему образованию подводит итоги предыдущему циклу развития. Обсуждаются вопросы о переходе к обязательному среднему образованию и о политехнизме.

Решения XIX съезда КПСС (1952) дают установки на усиление политехнического обучения. Широко политехнизация обучения разворачивается после принятия закона «Об укреплении связи школы с жизнью и о дальнейшем развитии системы образования в СССР» (1958). Школа преобразуется в 11-летнюю (8 + 3).

Содержание математического образования подвергается изменениям. В 1954 г. вводится производная, в 1960 г. – приближённые вычисления, логарифмическая линейка, векторы. Ликвидируется самостоятельный курс тригонометрии. Организация обучения также меняется: наряду с уроками проводятся лабораторные работы, экскурсии (в том числе, на производство).

Появляются новые учебники: А.Н. Барсукова (алгебра), В.Г. Болтянского и И.М. Яглома (геометрия), Е.С. Кочетковой и Е.С. Кочеткова (алгебра и элементарные функции), Н.Н. Никитина (геометрия), С.И. Новосёлова (тригонометрия).

В конце фазы ставится вопрос о необходимости новой реформы (Б.В. Гнеденко, А.И. Маркушевич).

Вторая фаза, реформаторская (1964–1969)

В 1964 г. создаётся Комиссия по определению содержания среднего образования. Главная идея реформы – сближение школьного курса математики и науки математики: использование теоретико-множественной терминологии, построение курса геометрии на основе геометрических преобразований, введение элементов интегрального исчисления. Всё это вошло в новую программу (1968). В срочном порядке создаются учебники для школы.

Эти изменения происходят на фоне отказа от одиннадцатилетней школы и политехнизации. Возвращается десятилетка (1964), отменяется обязательное профессиональное обучение в школе (1966).

Третья фаза, экспериментально-эклектическая (1970–1976)

Начался переход на новые программы по математике. Школа оказалась не готовой к такому переходу, не были переподготовлены учителя. В результате старые педагоги стали уходить на пенсию, что осложнило проведение реформы.

В связи с трудностями реализации реформы приходилось на ходу вносить коррективы в сложившийся процесс обучения (отмена годовых оценок по геометрии в первый год реформы). Имело место снижение уровня математической подготовки школьников.

В это время на Западе уже началась критика теоретико-множественного подхода в обучении математике. Один из руководителей реформы А.Н. Колмогоров предчувствовал, что вскоре она может развернуться и в СССР.

Четвертая фаза, структурно-организационная (1977–1987)

Введение обязательного среднего образования (1977). Критика «колмогоровской реформы» и начало контрреформы: организация комиссии во главе с А.Н. Тихоновым для пересмотра содержания математического образования, критическая статья Л.С. Понтрягина в журнале «Коммунист» (1980).

Начинается переход на обучение с шести лет (1981) – фактическое возвращение одиннадцатилетней школы. Выходят «Основные направления реформы общеобразовательной школы», провозглашавшие информатизацию образования и организацию предмета «Основы информатики и вычислительной техники» (1984).

Учебники геометрии были отвергнуты и заменены новыми, другие переработаны, что в основном выразилось в изгнании теоретико-множественной терминологии и символики. Появились и новые учебники алгебры (Ш.А. Алимов и др.).

Новая программа по математике появилась только в 1985 г. Она акцентировала внимание на формировании вычислительной культуры, усилении логического компонента.

Пятая фаза, инерционно-развивающаяся (1988–1997)

Данная фаза проходит под воздействием негативных внешних факторов: распад СССР, спад экономики, развал промышленности.

Несмотря на эти и другие факторы, система математического образования проявляет устойчивость. Типовые программы для средней школы (1991, 1996, 1998 гг.) не подвергаются существенным изменениям. Сохраняются организационные формы преподавания, развиваются уровневая и профильная дифференциация обучения.

На этом заканчивается очередной виток в развитии школьного математического образования. Он привёл к расширению содержания математического образования как внутри предмета (элементы математического анализа, аналитической геометрии, вектора), так и вне предмета (введение предмета «Основы информатики и вычислительной техники»).

Заключение

Приступая к описанию современного цикла развития (с 1998 по настоящее время), отметим, что оно должно проводиться с учётом возможной аберрации близости, когда мы не можем оценить в полной мере объективно значимость того или иного события.

Отметим, что с середины 2000-х гг. можно говорить о радикальных мерах по модернизации школьного математического образования, свидетельствующих о переходе к реформаторской фазе развития. Это, прежде всего, изменение содержания (введение элементов теории вероятностей и статистики в школьный курс, создание профильного старшего звена с целой серией соответствующих программ), уменьшение часов на изучение математики, изменение формы итоговой аттестации (ЕГЭ, а теперь и ГИА в 9 классе).

Внедрение в массовую практику Единого госэкзамена даёт основания говорить о начале экспериментально-эклектической фазы. ЕГЭ, бесспорно, отразится (и уже отражается) на всех сторонах процесса обучения. Встраивание ЕГЭ в нашу систему образования идёт явно непросто. Уже сегодня имеют место существенные корректировки. Так, недавно утвержден список из 24-х вузов, которые имеют право проводить собственные вступительные экзамены (тем самым ЕГЭ перестаёт быть единым). Кроме того, с 2010 г. содержание и форма выпускного экзамена подвергнутся изменениям: будет исключена часть *A* (задания с выбором ответа), а в часть *B* введены геометрические задания.

Но даже учитывая коррективы, говорить о том, что ЕГЭ приживётся в нашей школе, рано. Ведь за экспериментально-эклектической следует структурно-организационная фаза, которая и проверит на прочность все вводимые в массовую школу новации.

◀ Вернуться к содержанию



Воспоминания о Сергее Борисовиче Стечкине



Николай Николаевич АНДРЕЕВ
Научный сотрудник Математического института им. В.А. Стеклова РАН
andreev@etudes.ru

Мои воспоминания в основном записаны в начале 1996 г., потом иногда редактировались. Они не о школьном учителе, они об Учителе математики и жизни.

Из учеников С.Б. Стечкина я, наверное, знал его меньше всех. К сожалению, я оказался последним учеником Сергея Борисовича и общался с ним чуть более полутора лет. Несмотря на это, хочется написать о нём. Мы жили им. И если на этих страницах слишком часто будут встречаться эпизоды, связанные со мной, то это из-за отсутствия у меня каких-либо литературных наклонностей. Стечкин не успел научить меня хорошо писать. Прошу меня извинить.

На семинар Стечкина я первый раз пришёл в апреле 1994 г. Войдя в аудиторию 15-04 мехмата МГУ, Стечкин окинул всех взглядом, поздоровался, и сразу задал мне вопрос: «Вы кто?» Я начал говорить, что вот, мол, пришёл послушать, но Стечкин оборвал: «Кто Вы?» И, узнав, что я студент второго курса, прошёл от двери и сел на первую парту в ряду возле окна. Это было его постоянное место.

После доклада выступавшего — кто это был, я сейчас не помню, — он подозвал меня, попросил представиться, задал вопрос: «Вы аналитик или геометр?» и, получив ответ «Наверное, аналитик», сказал: «Вот вам задача». Он дал ссылки: «Посмотрите мою работу, связанную с нулями ζ-функции Римана», назвал статью Арестова с Кондратьевым, а так же Россера и Шонфельда. Это была задача, связанная с поиском областей, свободных от нулей ζ.


С.Б. Стечкин

Затем участники семинара прошли на кафедру. Там был кофе; наверное, какой-то кекс, а самое главное — беседа. Если я правильно помню, то Стечкин тогда хотел получить книгу Ингрит Добеши о всплесках. Дал красочное описание самой И. Добеши в словах, которые я здесь приводить не буду, и объяснил одному из молодых своих учеников Алёше Алимову, что он хочет иметь её книгу, а не её саму.

Далее на ковёр был вызван я, и Стечкин спрашивал, кто я и откуда. Конечно же, я сказал, что из Саратова, и это, возможно, повлияло на то, что Сергей Борисович меня взял и со мной возился, несмотря на мою неграмотность. В тот вечер я был со скрипкой — у меня была репетиция — и среди прочего Стечкин спросил: «Скрипка это с девушками или вместо?» Потом он иногда задавал и более глубокие вопросы по поводу девушек.

С этого началось моё знакомство с Сергеем Борисовичем, с этого начинаются и мои воспоминания. Дело в том, что у меня было не так много общения с ним, всего полтора года, и каждая встреча с ним осталась в памяти. Я начал ходить в МИАН[1] на семинары по четвергам в 10 часов. Стечкин был очень заботлив. Представив меня на семинаре, он сказал: «Я прошу отвечать на все его вопросы. Вначале он будет задавать глупые вопросы, но он же *учится*». Как и в этой фразе, он обычно выделял слова интонацией, всегда говорил чётко и продуманно, с расстановкой.

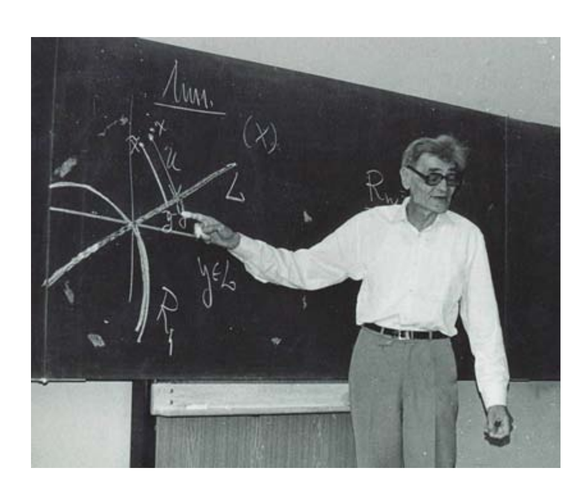
На семинарах по вторникам, проходивших в аудитории 15-04 ГЗ МГУ, Сергей Борисович часто прерывал докладчика, оборачивался к аудитории, говорил «для маленьких» и дальше на прекрасном образном языке излагал и историю того, о чём говорилось, и то, что это такое вообще, и то, что он думает по этому поводу. Это были замечательные отступления.

Я пришёл первый раз домой к Стечкину. Это было в тот период, когда ему нездоровилось, и кто-то из аспирантов его провожал. После семинара в Стекловке Лёша Алимов спросил, не хочу ли я проводить Сергея Борисовича. Мне хотелось, но было страшновато. Мы зашли вначале на физиопроцедуры в поликлинику Академии наук, а затем поехали к нему. Я нёс его сумку — он отдавал её, когда кто-то шёл с ним. Меня посадили на кухне. Стечкин поставил чайник и сел. Для меня всё было в первый раз, Сергей Борисович это понимал и объяснял: «Сейчас попьём чай, а потом займёмся математикой».

Пока закипал чайник, вышли на лестничную площадку покурить. Стечкин предложил мне сигарету, я сказал, что не курю. Он закурил, сел на корточки, прислонившись спиной к стене, и рядом с собой на пол положил спичечный коробок, на который стряхивал пепел. Я встал на лестнице на пару ступенек ниже площадки. Стечкин помолчал и начал говорить. Он никогда не начинал говорить сразу. Создавалось впечатление, что он вначале понимал, что всё есть так, как он этого хочет, потом всё осмысливал и только затем говорил. Но это уже мои домыслы. Сколько раз я ещё вот так стоял на несколько ступенек ниже лестничной площадки и слушал этого великого человека, сидевшего на корточках, курящего, одетого в валенки и фуфайку...

---

[1] Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук. – *Прим. ред.*



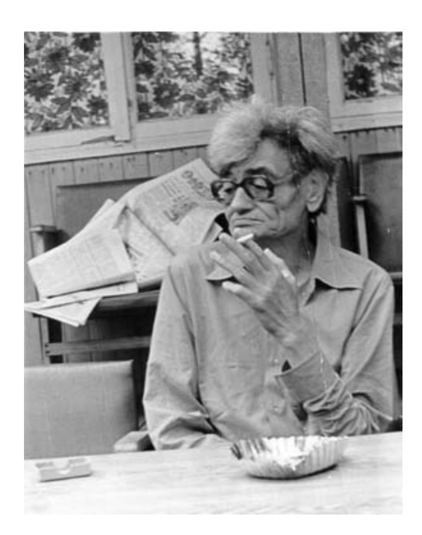
СБС читает доклад

Стечкин докурил, и мы вернулись на кухню. «Что будете: чай или кофе?» – спросил он. Я ответил, что хочу кофе. Сергей Борисович взял новую банку кофе и стал открывать. Мне стало неудобно, и я сказал, что из-за меня не надо начинать новую банку. Стечкин посмотрел на меня, хмыкнул и произнёс: «Ещё мне тут всякие будут говорить, что делать», после чего налил мне кофе. Я никогда не забуду эту строгую доброту. Мы попили кофе, Сергей Борисович отставил стакан и достал бумагу. Он всегда брал много листов, чтобы было удобно писать. И начал говорить о моей задаче, записывая иногда на бумагу. Я, сидя напротив, начал переписывать то, что он фиксирует, но Стечкин остановил: «Это я для Вас». Так делалось всегда. Вначале Сергей Борисович писал дату, фамилию, далее фиксировал основные моменты беседы, а в конце ставил подпись – СБС. У меня сохранились все эти листочки. Один из них с особенно тёплым заглавием: «Беседа с К. Андреевым на пасху 23.4.95 г.». Он знал все праздники.

Летняя школа учеников СБС 1994 года, проходившая в Белорецке, началась для меня в Уфе, когда я подсел в поезд, где ехали москвичи. Меня позвали в купе к Сергею Борисовичу. «Что ж, за удачное начало», – сказал Стечкин, разлив по рюмкам коньяк... Школа действительно оказалась самой великолепной, из тех немногих, на которых мне довелось побывать.

Последнее время Сергей Борисович, вероятно, в основном занимался проблемами теории чисел. Я не в праве делать здесь какие-то выводы, но у меня сложилось впечатление, что со временем все великие приходили к теории чисел. Наверное, это приходит с познанием. На школе в Белорецке я слышал от Стечкина такую фразу: «Многие выдающиеся специалисты в области теории функций занимались теорией чисел. Обратное не верно. Эйлер – создатель аналитической теории чисел. Чебышёву мировую славу снискали вовсе не его работы по анализу, а работы по теории чисел. Адамар создал теорию целых функций комплексного переменного и их нулей, которая позволила ему доказать закон распределения простых чисел... Я считаю, что всякий сильный аналитик наряду с возможностью заниматься анализом может, и, с моей точки зрения, должен заниматься теорией чисел».

Я позволю себе вспомнить ещё один эпизод, связанный со мной. В какой-то момент я интересовался многомерным аналогом задачи Турана-Стечкина. На одном из семинаров в Стекловке С.В. Конягин сказал, что ему нужна подобная задача для изучения теоретико-числовых вопросов; только нормировкой является не сумма коэффициентов Фурье функции, а сумма их модулей. Стечкин сказал, что сначала следует выяснить, разные ли это задачи. В какую-то среду я нашёл в книге Зигмунда функцию, показывавшую, что эти задачи разные. В четверг перед семинаром я сказал об этом Сергею Борисовичу, он кивнул, а после семинара вытянул меня к доске. Я нарисовал функцию, и было понятно, что задачи разные, но,


На природе

чтобы получить окончательный ответ, необходимо было посчитать какой-то интеграл, что-то похожее на который считал в своё время Стечкин. Он сказал, что у него была работа и её надо посмотреть.

После меня вышел один из участников семинара Антон Попов и доложил, что он рассматривал похожую функцию, тоже нарисовал её и сказал, что он с ней возился, но получил только плохие оценки. Сергей Борисович отреагировал так: «Теперь тараканьи бега: кто первый – того и результат».

Это был четверг, а в пятницу мне передали, что Стечкин хочет, чтобы в субботу я был у него. Я был поражён, потому что когда мы (ученики) ему звонили и договаривались о встрече, он всегда спрашивал, подходит ли нам это время. А тут – приехать и всё. Я приехал. Первый вопрос: «Досчитал»? После отрицательного ответа Стечкин уже был сердит. Он посадил меня на кухне, разговор был не самый приятный. В какой-то момент Сергей Борисович пошёл в большую комнату, принес оттуда оттиск своей работы, дал его мне, после чего выгнал и сказал, чтобы я шёл и считал; не ел, не спал, а когда посчитал – позвонил ему. Это было где-то до обеда. И это был единственный раз, когда он меня выгонял. Часов в шесть вечера я ему позвонил и сказал, что досчитал. Он воспринял это как должное. К этому моменту Стечкин и сам всё проверил.

Вот так он иногда «сажал в тюрьму» (это его высказывание) и временами надолго. Кстати, разбирая бумаги после смерти Сергея Борисовича, мы поняли, что он, приходя домой с какого-нибудь доклада или после встречи с учениками, пересчитывал всё, что слышал, часто вплоть до констант.

Помню, ещё раз у нас с ним состоялся подобный разговор. Его высказывание было примерно следующим: «Вы доказали? Вчера я виделся с Вами ещё до обеда, сегодня я уже после обеда. Что же Вы делали?»

Перед отъездом домой на лето я зашел к Стечкину. Это было в правилах. В этот раз мы почти не занимались математикой. Сергей Борисович долго рассказывал о своём детстве. О том, как он бывал иногда в деревне у своей то ли бабки, то ли прабабки, муж которой был писателем (фамилию его я забыл). О том, что его бабушка по другой линии была почётной жительницей Москвы (а это до революции, как я понимаю, значило много). И ещё много-много другого. Стечкин редко так много говорил о себе. Тогда я не знал, что это последний раз, когда мне довелось слышать его нормальный голос.

В этот год (1995) с Летней школой учеников СБС, как нам вначале казалось, сложилось неудачно – на Урале сделать не смогли, хотели в ближнем Подмосковье, но тоже не получилось. Школа была проведена в Московском университете. По приезде в Москву все узнавали, что Стечкину сделали операцию. Для того чтобы говорить, ему приходилось зажимать трубку, торчащую из горла. Он слушал, а в ответ в основном писал в «разговорной» тетради. Проведение Школы в Университете дало возможность ему между процедурами иногда появляться на заседаниях.

Сергею Борисовичу дали колокольчик, чтобы он мог обращать на себя внимание, а когда это было слишком мягким воздействием, он хватал палку и стучал ею. Видно было, что ему трудно комментировать только мимикой, он выскакивал к доске, писал, но и этого ему явно не хватало. На свой доклад он приготовил две тетради, по одной он писал, а по другой читала текст его жена, Татьяна Васильевна. Стечкин же в это время поворачивался к аудитории и руками и выражением лица комментировал. Это была его последняя Школа. Он это понимал и иногда говорил, что нужно будет делать потом в математике после его кончины. Тогда в это не верилось. Несмотря на плохое самочувствие, на банкет он пришел. Школа состоялась.

После этой школы я виделся со Стечкиным редко. 14 сентября 1995 г. мы с Алёшей Алимовым были приняты СБС, отдыхавшим в академическом санатории «Узкое». Вначале он разговаривал со мной, а Алёша занимался наладкой маленького телевизора. Стечкин всё писал. Он нагрел чай и предложил конфеты из коробки. Я было отказался, но он настоял. Вспомнился первый мой приход домой к Стечкину и момент с кофе...

В этот раз он рассказал «философию СБС» решения «сумасшедших задач» («сумасшедшими» он называл экстремальные задачи, в которых присутствуют как условия на функцию, так и на её преобразование Фурье). «Всякая экстремальная задача решается так: "с неба" Вы догадываетесь, какова экстремальная функция, а потом с муками доказываете это. Пока Вы не догадались, чувствуете себя идиотом и ноете – как сейчас». В тот раз я действительно был в тупике и не знал, что делать дальше.

Он также сказал, что нужно заниматься общей теорией «задач Конягина», то есть с ограничениями на сумму модулей коэффициентов Фурье функции. Стечкин велел мне записать на бумаге задачи, которыми я тогда занимался. Он посмотрел, затем написал, чем следует заниматься в будущем. Потом он разговаривал с Алёшей.

После разговора Сергей Борисович предложил показать нам здание санатория – дворец. Прошлись по всему дворцу, побывав в столовой, в гостиной с большим числом картин и в бывшем парадном входе с огромным трельяжем. Потом сидели на диване рядом с его комнатой. Он курил, мы рассказывали о том, что сейчас делается на семинаре, в Университете, в Екатеринбурге (где у него было много учеников). Он улыбался и кивал, если высказанное ему нравилось, и комментировал в противном случае. Вошли в комнату, ещё немного поговорили. Стечкин достал расписание автобусов, посмотрел, когда ближайший, и сказал, что если мы хотим уехать этим рейсом, то минут через десять надо выходить. Спросил, знаем ли мы, как идти к остановке, и объяснил путь. Он, как всегда, был заботлив.

В сентябре я виделся с Сергеем Борисовичем ещё только один раз, в день отъезда на воронежскую конференцию по теории чисел. Я позвонил ему и спросил, не хочет ли он поговорить с Herve Queffelec'ом, учеником J.-P. Cahane. Ответ был утвердительным. Нас приняли дома, как обычно на кухне. Стечкин выглядел совсем плохо. Я сказал ему об этом, на что он ответил: «Не было бы санатория, было бы ещё хуже». Он хорошо держался. Величие этого человека нельзя было скрыть ни за какой болезнью.

22 ноября 1995 года Сергей Борисович Стечкин умер.

Афоризмы Стечкина

Хотелось бы поделиться теми фразами Сергея Борисовича, которые остались у меня в записях. Они, конечно, всегда говорились по какому-то поводу, и, отделённые от него, не всегда несут такую смысловую нагрузку как в контексте. Но я надеюсь, что они окажутся кому-нибудь интересными.

- Науки делятся на две категории: на те, в которых есть великие проблемы, и на те, в которых нет великих проблем. Последними заниматься не стоит.
- Всего вина не выпьешь, все задачи не решишь, всех денег не заработаешь.
- Всякая задача, к которой вы подходите в первый раз, не бывает решена так тщательно, как бы вы хотели. Поэтому когда кончать заниматься этой задачей, на первых порах должен говорить руководитель.
- Если вы не можете решить задачу, то надо её ослаблять, пока она вам не дастся.
- Студента второго курса надо учить читать литературу. Студенту старше четвёртого курса надо запрещать читать.
- Работа не является помойным ведром, в которое можно включать всё, что хотите.
- В аннотации пишется то, что в работе есть, а не то, чего в ней нет.
- Введение есть описание задачи; того, что по ней сделано; того, что вы сделали, и дурь.
- Чужие предложения называют леммами, а не теоремами.
- При перечислении кучи теорем полезно что-то раскрыть.
- Если вы что-то знаете, то это и доказывайте, а не доказывайте частный случай, говоря при этом, что общий случай делается точно так же.
- Как бы вы ни спешили, следите, чтобы ошибки и опечатки были не на каждой строчке. Если вы пишете бред собачий, то не упоминайте меня.
- Вам так легче! Вам легче и удобнее! Вы ж не Ельцин. Вам надо думать о читателях. Это я Ельцина не могу заставить думать о людях. А вас я заставлю думать о читателях – иначе думайте о моей палке.
- Глупость свою надо демонстрировать.
- Вы говорите так красиво, что я ничего не понимаю.
- Математика делится на три части: до меня, я и после меня.
- Я не про вас, я про доклад.

Вернуться к содержанию

Дети 1920-х годов о своих знаниях[1]

Предисловие

Общественно-педагогическое движение начала XX в. за демократизацию школьной жизни ставило ученика в центр системы образования. Это влекло за собой попытки переустройства школы на новых, гуманистических принципах. Придя к власти, большевики попытались воплотить чаяния дореволюционных педагогов сначала на бумаге, а затем в жизни. В октябре 1918 г. были опубликованы основополагающие документы о новой школе: «Положение об единой трудовой школе» и «Основные принципы единой трудовой школы».

Среди прочего оба документа содержали указания об организации самоуправления в школе. Ответственным органом самоуправления должен был стать школьный совет, в который входили педагоги, учащиеся, местные жители. Наряду со школьным советом авторы документов предполагали ещё и ученическое самоуправление: организацию различных комиссий, деятельность которых способствовала бы нормальному течению свободной школьной жизни.

Новая власть отменила в школах отметки и экзамены, считая, что эти явления травмируют души детей. В дальнейшем стало ясно, что отсутствие учета знаний ведёт к снижению их уровня, и было решено ввести какую-то форму контроля. Конечно, это не могли быть дореволюционные экзамены, необходимо было придумать что-то другое. Проблема решалась по-разному: использовали дневники, протоколы, отчеты. Нередко сами ученики оценивали знания – свои и своих товарищей.

В Центральном городском архиве г. Москвы имеются фонды школ города, включающие документы за 1920-е гг. Эти документы позволяют увидеть, что происходило в то время в обычных школах. Объектом нашего внимания будут протоколы заседаний различных комиссий учащихся 2-й советской школы Бауманского отдела народного образования (Ф. 2054. Оп. 1. Д. 5). Эти протоколы позволяют воочию увидеть, как дети реагировали на инициативы взрослых по вовлечению их в управленческие игры.

Из публикуемых ниже текстов (орфография и пунктуация сохранены) видно, как ответственно дети относятся к работе по учёту в начальной школе – скрупулезно описывают усвоенное и сделанное, стараясь ничего не упустить. То, что пишут вчерашние неграмотные дошколята, не всегда ясно. Но здесь по счастью нам приходит на помощь отчёт их учительницы, который всё расставляет по своим местам и к тому же показывает, каким образом сообщаемые знания преломлялись в детских головах (см. ниже первые два документа).

Но дети взрослеют, им уже неинтересно играть в эти игры, и отчёты о пройденном в 5-й и 7-й группах (привычные нам классы тогда назывались группами) носят печать формального подхода. Ученики вписывают стандартные лаконичные фразы и, хотя делают это аккуратно и почти без ошибок, но за текстом уже не чувствуется детской души, желающей поведать нам о своей непростой жизни в отчётный период.

Итак, обратимся к архивным документам...[2]

---

[1] Предисловие и публикация В.М. Бусева.

[2] После каждого документа в круглых скобках помещены номера листов указанного выше дела.

Протокол 1 группы 5 апреля [1924 г.]

Мы рассказывали как проводили зимний одых. Самый интересный рассказ был Володи Арина как они строяли ледяную крепость и сражались.

Когда напало много снега мы рассматривали форму снежинок рисовали и вырезывали их. Читали снегурку и узнали как образуются снежинки и иней. Учили снежинки. Рассматривали узоры на окнах. Рассказывали какую радост приносит зима детям. Учили утро морозное читали зимние забавы зима Проказы старухи зимы. Лиса заяц и пету. Как люди пользуются санной дорогой и снаряжают обозы для обмена товаров рабочих и крестьян. Читали Мужиковы сани.

Как жилось рабочим при царе и как цар относился к народу народ перестал верит царю и стали готовится свергнут самодержавие. Учили 9 января. Когда умер Ильич мы учили на могилу Ильича.

Мы рассказывали продомашних животных и чем они питаются. Мы разбирали кошку. Кошка хищный зверок Собака коготки не втягивает. Защищается она зубами Собака приносет большую пользу стережот дом ходит на охоту. Собака спосает во время мятелей пожаров и когда тонут. На севере собаки заменяют лошадей. Учили Мышки жучка и кошка Ваня и Буян.

У Овцы мордочка длинна на голове у овцы завитые рога а уши у овцы врозь спинка прямая, хвостек коротенький ножки коротенькие овца не больша [неразборчиво] собаку когда со овцы состригут шерсть тогда из нее делают валенки шерстенную материю. вяжут теплые чулки, теплые варежки кофточки теплые плотки и шапки Когда овцу зарежут из шкуры делают шубы а из сала делают свечи, а мясо едят

У коровы голова длинная и плоская. Рога унее зогнутые уши врозь спина у нее прямая хвост длинные и на конце кист волос ноги кроткие копыта раздвоенные Корова дает молоко из молока делаются сливки масло сметана, творог сыр. Когда корову убивают из кожи делают ремни башмаки, из шерсти плохова сорта валинки, бурки воилок, из копыт клей из рок делуют гребишки гребенки.

У лошади голова длинная, ушки стоят глазки умные шея украшена гривой. Ноги у лошади длинные. Однокопытные. Хвостик у лошади длинный и кросивый. Лошади возят тяжести и пашет. А когда лошадь убют то мясо идет на пищу. Из кожи делают сапоги бошмаки ремни. Из капыт делают клей из конского волоса щётки кисти.

Мы рассказывали 12 февраля и ставили пьесу Провенился

Как люди готовется к весне Солнышко стало греть. А люди стали с крыш с кидовать снег и скалывать лед с трутуаров И звощики стали приготовлять телеги для того чтобы лошадям было легче ездить по камням Возили лед в погреба а мы сделали календарь и отмечали что заметели новово о весне

(Л. 10–13)

Отчет о пройденном за I и II триместры 1923–24 уч. года в первой возрастной группе [извлечение].

Для удобства вторая, третья и четвертая колонки таблицы, общие для всех строк, расположены перед таблицей.

Труд. Работы на улице. Уборка снега с трамвайных рельсов и ж. дор., мостовых

Природа. Снег. Иней. Форма снежинок

Общество. Способы передвижения. Зимние развлечения.

Темы	Беседы, наблюдения, экскурсии	Материал для проработки	Фиксация
IV. Зима в городе		Лиса, заяц и петух. Снегурка. Ст. Снежинки Мужиковы сани Зимние забавы Утро Морозное	Рисунки на тему Модели саней
V. 9 Января	Жизнь рабочих и крестьян при царе. Отношение народа к царю. События 9 Января. Потеря веры в царя. Утрата великого вождя. Смерть В.И. Ленина	Ст. 9 Января. Ст. На могилу Ильича. Разуч. Революционных песен.	Зарисовки. Собирание картои? И портретов В.И. Ленина
VI. Домашние животные	Собака – друг человека. Рассказывание. Кошка. Характерны особенности ее. Лошадь – как рабочая сила. Корова. Польза, приносимая человеку.	Ваня и Буян. Жучка и кошка. Мыши. Рыжуха и ее жеребенок. Рыжуха и волк. Теленочек. Буренушка.	Коллективное сочинение, иллюстр.
VII. Февральская революция.	Тяжелое положение народа. Голод, продолжающаяся мировая война, нарастающее недовольство, свержение самодержавия.	Подготовка к спектаклю.	
VIII. Наступление весны.	Приготовления к весне. Сбрасывание снега с крыш, уборка его с улиц. Пилка льда на реках и прудах. Набивка погребов. Приготовление колесных экипажей. Перемена одежды. Календарь весны. Экскурсия на ледокол.	Старый годовик. Ранняя весна. Зима и весна. Курочка-хохлатка. Чернушка.	Коллективные сочинения: Первые шаги весны, Экскурсия на ледокол.

(Л. 3 об.–5)

Библиотецная комиссия

Мы собралис и пошли в 9 8 6 группу попрасит книги только не учебники а сказки и рассказы с крупной печатью и с хорошими картинками они обещали принести книги нам принесли книги и расписывалися на бумаге кто какие принес книге мы дин раз сговорились чтобы прити рано утром и делать шкаф когдо мы сделали шкаф на другой ден стали раздавать книги и досих пор разавм [раздаем?] книги *Глебова Карлин Игнатьев Бубнова*

(Л. 13–13 об.)

Протокол по птичке. Снегеиря

Мы когда приходим в класс тогда и чистим клетку так мы вытираем жордочкии и внутри клетки вычищаем меняем воду даем корм семячки. Потом когда уходим домой тогда мы уносим клетку в учителскую. *Мехаелова Глебова* и *Воинова*

(Л. 14)

2 группа Б. Как мы работали в эту зиму

Мы собрали собрание выбрали председателя учкома и секретаря. Председатель стал вести собрание, секретарь записывал все что постановляли, учком ходил на собрание. Первую комиссию мы выбрали по ведению календаря. Обязанности комиссии по календарю такие. Она должна была разлиновать календарь, и каждый ден отмечать погоду и температуру. И кроме того должна была следить за нашими дневниками. Мы тоже там отмечаем погоду и температуру и какая была ночь: лунная, звездная и темная.

Вторую комиссию мы выбрали санитарную. Санитарная комиссия должна была разлиновать лист бумаги в клетку и отмечать в каждой клетке минус или плюс. Минус значит грязным а плюс чистым. И оказалось что один мальчик все дни ходил грязным. И ему все дни ставят минусы. Другие ученицы и ученики, ходили грязными но не все время.

Третью комиссию мы выбрали по ведению журнала. Обязанности были такие. Комиссия сделала журнал и переписывала все кто сочиняли стихи и рассказы. И зарисовывала картинку к каждому стиху. Четвертую комиссию мы выбрали по живому уголку. Комиссия по живому уголку следит за растениями. Она посадила в бутылки и в баночки растения и овощи. а животных у нас нет потому что у нас холодно и они могут умереть. Комиссия следит за растениями меняет воду и надписывает какое растение здесь посажено. А мы подходили и смотрели какое у нас растение есть. Пятую комиссию мы выбрали библиотечную. Комиссия собирала со всех книги составила список всех книг и оказалось у нас 39 книг. Она меняет книги каждый понедельник. Кто испачкает или разорвет книгу то тому больше не дают. Шестую комиссию мы выбрали следить за пальто. Комиссия следит за пальто, чтобы оно не валялось. И раздает в большую перемену, когда все уходят домой.

Седьмую комиссию мы выбрали по уголку Ленина. Комиссия по уголку Ленина собрала все стихи и картинки и вешает их на стенку. И следит за тем чтобы не пылились и не грязнились картины.

Так мы работали всю зиму.

(Л. 46–47)

2 группа Б. Школьное хозяйство

Мы знакомились со школьным имуществом. Мы ходили по классам и считали сколько парт сколько досок, сколько окон, и сколько в каждом классе человек. На уроке арифметики мы подсчитали, сколько всего имущества в нашей школе. Мы узнали у нянечки сколько выходит дров и воды в день. Потом мы придумывали на это задач. Мы дальше знакомились с тем как управляют наши школы. Сначала мы составили схему управление нашей школы. Еще мы чертили схему тоже управление школы. Города Москвы. Мы знакомились с раионым советом. Кроме того мы знаем кто токое пионер. Мы читали журнал Барабан, там мы читали как живут пионеры и кокие у них законы. И разучивали одну песню с учителем пения. Что они делают зимой и что делают летом. Выслушали доклад одной пеонерки как они проводят работу. Потом мы узнали про комсомол. Комсомольцы ведут беседы, и помогают рабочим и крестьянам. Комсомольцы помогают без призорным детям. Мы знаем что

рабочие обядняются в проф союзы. Союз Текстильщиков. Союз Металистов. Союз Дворников. И так далие. Составили диограмму распределения радителей по проф союзов. Еще составили схему по профсоюзов.

Школы и хозяйства усвоены хорошо.

Пеонеры и Комсомолы тоже усвоены хорошо. И проф союзы усвоены.

Знаем метрические меры, длины.

(Л. 62–63)

Возникла комиссия по вешалке 6 февраля месяца 1924 года. До этого был большой беспорядок. Вешали сами как попало: где больше где меньше. А когда собирались домой рвали вешалки, роняли польто под ноги. На одном собрании ученица Козырева предложила выбрать вешолочную комиссию. С этим предложением весь класс соглосился и для этого выбрали 3 учениц Иванову Корякину Бирюкову. Мы остались после уроков сосчитали сколько учеников, и каждая девочка взяла себе часть учеников и написали записки кто на какой вешалке вешает. Когда приходили мы вешали, а когда уходили домой мы раздовали. Кто оставит завтрак или плоток мы недовали. *Иванова Карякина Бирюкова*.

(Л. 286)

Учет работы по алгебре, в V группе, 2-й советской школы, за промежуток времени со второй половины января по начало апреля 1924 года.

Было проработано, 4 действия с многочленами, исключая деления на многочлены. Разложение на множителей вынесение за скобки. Сложение подобных членов. Сокращение алгебраических дробей. Решение уравнения переносом членов. При прохождение всех отделов курса попутно решали уравнения.

Метод. Выводили правила из примеров.

Усвоение. Группа в целом усвоила сравнительно удовлетворительно. При прохождение курса затруднений не встречалось.

Председатель *Глебова* Секретарь *Павлова* Докладчик *Садовская*

(Л. 320)

Персональный учет V гр.

Анохин. в классе ведет себя довольно легкомысленно и относится к делу довольно небрежно

Байер. в общее относится к делу довольно окуратно.

Бокова. относится к делу старательно но немного отстала к математическому развитию

Бордуков. относится к делу довольно окуратно но несколько отстал к математическому развитию.

Варваричева. Последнее время заметно некторое улудшение к занятиям, одно из причин неполное успешность, частые пропуски вызванные тем, что далеко живет (ст. сартировочная)

Владимирова. относится к делу окуратно

Гагарина. относится к делу старательно в классе застенчива.

Глебова. старается но застенчива.

Гиндлин. мог бы достич большего

Дударева. относится к делу очень добросовестно и окуратно

Евсеева. Вообще относится к делу окуратно но что то мешает правильных занятий

Ермакова. Относится к делу окуратно

Ефимова. Последнее время замечается некоторое улудшение

Жалнина. Отстает от класса благодаря слабому математическому развитию

Иванов. Много пропусков, в классе не внимателен и работает не брежно.

Иванова относится к делу довольно окуратно, желательно помощ знающего лица в свободное время, одних классных занятий для нее не достаточно.

Иванюшина. В настоящее время относится к делу довольно окуратно, впрошлом курс сильно запущен, желательно меньше разсеяности.

Калмыкова отстала в математическом развитии в классе бывает расеяна.

Председатель *Глебова* Секретарь *Павлова* Докладчик *Садовская*

(Л. 321–322)

Отчет

В начале года наш класс вел себя прилично, но мало по малу он начинает распускатся. Мальчики не желают подчиняться учителям. За уроками идут разговоры, в перемену устраиваются шумные игры и т.п. В это время выбирают первого старосту. Но она не может подчинить себе класс да и неумеит сразу приняться за дело, и класс остается все таким же разнузданным как и был. Старостой вступившим с первого декабря для класса было сделано очень много. И он и подстароста были люди энергичные и начинают усиленно подгонять класс. Им пришлось вводить некоторые новые порядки, напр. не грызть подсолнухи, не сорить на пол, не ругаться; ввести все это было очень трудно, но все таки удалось. За это старостатство наш класс значительно повысился. Но при следующем старосте он снова начинает падать. Этому старосте класс совершенно не желает подчиняться. Вся проделанная им работа состоит в следующем: им (с подстаростой) был выработан целый ряд правил. Части этих правил класс подчинился (что стоило больших усилий) другую же часть оставил без внимания. И хотя этот староста очень старался, но, повторяю, подчинить себе класс не смог. Следующий староста обращает все свое внимание на дисциплину, но сладить с нашим классом было невозможно, и он за это старостатство остался на прежнем уровне. Следующим старостой была проделана очень большая работа. Он с'умел подчинить себе класс, и класс начинает подчиняться. Этот работал очень добросовестно и класс значительно повысился.

Я за свое старостатство (я работаю 2-ю неделю) ничего для класса не сделала. Некоторые мальчики совершенно меня не слушают и я не могу с ними сладить. Мало мне помогает и подстароста. Единственно, что мне удалось это устраивать чтения на пустых уроках, но очень мешают мальчики: они поднимают страшный шум. Я сознаю, что не могу справиться с классом и несколько раз просила переизбрать старосту но класс этого не делает и я продолжаю работать. Подчиниться же мне класс не желает.

Староста V гр. Садовская. 5/IV 1924 г.

(Л. 326–326 об.)

Протокол учетного собрания учащихся 7-й А гр. от 4 апр. 1924 года.

Порядок учета:

1) Материал проработанный по геометрии в период с 21 февр. по 4 апр. 1924 г.
2) Метод проработки материала.
3) Степень усвоения.
4) Условия работы и отношение к делу.
5) Пожелания на будущее время.

1) Параллельные линии: признаки параллельности и выводы. Изучение углов треугольника. Углы четырехугольника. Внутренние и внешние углы многоугольника. Построение некоторых углов данных градусов. Окружность.

2) Вывод теорем из предварительно-разобранных задач.

3) В целом класс материал усвоил удовлетворительно.

4) Наблюдался перерыв, причиной которого была перемена преподавателя. Отношение к делу «сносное».

5) Желательно продолжить систематические занятия в период летнего триместра, в целях заполнения некоторых пробелов курса.

Председатель: *Евсеев*.

Секретарь: *Герман Светлов*.

(Л. 375)

Вернуться к содержанию



Вокруг математики

ДВУКВАДРАТНЫЕ ЧИСЛА

Предисловие



Георгий Борисович ШАБАТ
профессор Института лингвистики
Российского государственного
гуманитарного университета
george.shabat@gmail.com

Весной 2009 года я проводил еженедельные домашние занятия с небольшой группой пятиклассниц и одним третьеклассником (двое из участников – мои внуки). Это называлось *Малый КЭМ* (**К**луб **Э**кспериментальной **М**атематики). Предлагаемая статья – продукт наших занятий. Тексты написаны детьми (с умеренным участием взрослых) на основе их докладов на семинаре А.И. Сгибнева в МЦНМО 19 мая 2009 г.

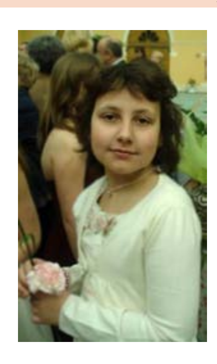
Мы ничего не доказывали и почти ничего не пытались объяснить. Мы учились наблюдать, подмечать закономерности и радоваться их проявлениям.

В процессе работы участники овладели компьютерными программами «Живая Геометрия» и MAPLE и активно их использовали.

Я признателен своим детям – М.Г. Шабат, придумавшей и организовавшей эти занятия, и В.Г. Шабату, помогавшему в работе. Техника работы с «косыми квадратами» перенята мной у А.К. Звонкина, которому я признателен и за эту технику, и за некоторые заимствованные у него навыки работы с детьми.

Эмблема КЭМа

Таблица двуквадратных чисел и наблюдения



Лиза Лепихова
участница Клуба экспериментальной математики

0. Определения

0.0. Все числа – натуральные: 0,1,2, ...

0.1. *Двуквадратное* число – это число, которое равно сумме двух квадратов.

0.2. *Двувидово-двуквадратное* число – это двуквадратное число, которое можно выразить как сумму двух квадратов двумя *по-настоящему* разными способами – то есть не просто переставив слагаемые. Например, $25 = 0^2 + 5^2 = 3^2 + 4^2$.

1. Таблица двуквадратных чисел от 1 до 150

Представление в виде 4n + 1	Число	Разложение на простые	Представление в виде $a^2 + b^2$
исключение	**2**	–	1·1 + 1·1
–	4	2·2	2·2 + 0·0
4·1 + 1	**5**	–	2·2 + 1·1
–	8	2·2·2	2·2 + 2·2
–	9	3·3	3·3 + 0·0
–	10	2·5	3·3 + 1·1
4·3 +1	**13**	–	3·3 + 2·2
–	16	2·2·2·2	4·4 + 0·0
4·4 +1	**17**	–	4·4 + 1·1
–	18	2·3·3	3·3 + 3·3
–	20	2·2·5	4·4 + 2·2
–	25	5·5	5·5 + 0·0 = 4·4 + 3·3
–	26	2·13	5·5 + 1·1
4·7 + 1	**29**	–	2·2 +5·5
–	32	2·2·2·2·2	4·4 + 4·4
–	34	2·17	5·5 + 3·3

–	36	2·2·3·3	6·6 + 0·0
–	**37**	–	6·6 + 1·1
–	40	2·2·2·5	6·6 + 2·2
4·10 + 1	**41**	–	5·5 + 4·4
–	45	3·3·5	6·6 + 3·3
–	50	2·2·5	5·5 + 5·5 = 7·7 + 1·1
–	52	2·2·13	6·6 + 4·4
–	58	2·29	7·7 + 3·3
4·15 + 1	**61**	–	6·6 + 5·5
–	65	5·13	8·8 + 1·1 = 4·4 + 7·7
–	68	2·2·17	8·8 + 2·2
–	72	2·2·2·3·3	6·6 + 6·6
4·18 +1	**73**	–	8·8 + 3·3
–	74	2·37	7·7 + 5·5
–	80	2·2·2·2·5	8·8 + 4·4
–	82	2·3·13	9·9 + 1·1
–	85	5·17	7·7+ 6·6 = 9·9 + 2·2
4·22 +1	**89**	–	8·8 + 5·5
–	90	2·3·3·5	9·9 + 3·3
4·24 +1	**97**	–	9·9 + 4·4
–	98	2·7·7	7·7 + 7·7
–	100	2·2·5·5	8·8 + 6·6 = 10·10 + 0·0
–	104	2·2·2·13	10·10 + 2·2
–	106	2·53	9·9 + 5·5
4·27 + 1	**109**	–	10·10 + 3·3
4·28 + 1	**113**	–	8·8 + 7·7
–	116	2·2·29	10·10 + 4·4
–	117	3·3·13	9·9 + 6·6
–	121	11·11	11·11 + 0·0
–	122	2·61	11·11 + 1·1
–	125	5·5·5	10·10 + 5·5
–	128	2·2·2·2·2·2·2	8·8 + 8·8
–	130	2·5·13	9·9 + 7·7
–	136	2·2·2·17	10·10 + 6·6

4·34 + 1	**137**	–	11·11 + 4·4
–	144	2·2·2·2·3·3	12·12 + 0·0
–	145	5·29	12·12 + 1·1
–	146	2·73	11·11 +5·5
–	148	2·2·37	12·12 +2·2
4·37 + 1	**149**	–	10·10 + 7·7

2. Наблюдения

2.1. Среди двуквадратных чисел есть *простые*. (Они выделены жирным шрифтом зелёного цвета.) Все простые двуквадратные числа (кроме 2) в таблице при делении на 4 дают остаток 1.

2.2. Произведения двуквадратных чисел двуквадратны. Это объясняется *волшебной формулой* – см. презентацию Антона (с. 61 этого номера журнала).

2.3. Двувидово-двуквадратные числа (в таблице они выделены красным) имеют общее свойство: это произведения двух простых нечётных двуквадратных чисел. Кроме 50, и об этом числе надо ещё подумать. Я проверила это правило на MAPLE и для других чисел, не вошедших в таблицу.

Оказывается, например, что

$$13 \cdot 17 = 221 = 14^2 + 5^2 = 11^2 + 10^2,$$

а

$$41 \cdot 61 = 2501 = 50^2 + 1^2 = 49^2 + 10^2.$$

Правило продолжает работать!

Последние числа находятся с помощью такой программы на MAPLE:

```
for x from 0 to 200 do
  for y from 0 to 200 do
    if x^2 + y^2 = 2501
      then print(x, y) end if
  end do
end do
```

MAPLE отвечает:

1, 50
10, 49
49, 10
50, 1

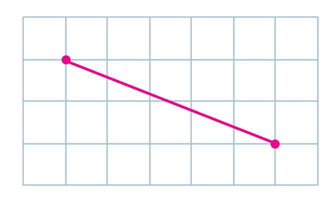
Площади косых квадратов и двуквадратные числа



Нина Шиндовски
участница Клуба экспериментальной математики

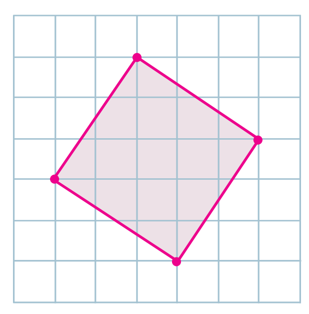
0. Определения

0.0. Вот *косой отрезок*:



Он строится так: «5 клеточек вправо, 2 вниз». Можно ещё сказать, что это – отрезок *типа* (5, −2).

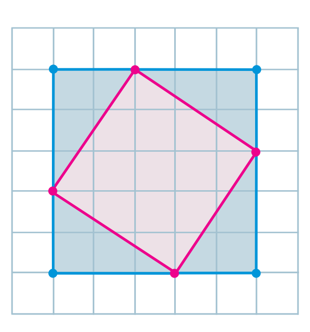
0.1. Косым квадратом мы называем квадрат, стороны которого – косые отрезки. Например:



Это – квадрат типа (3, 2). Его стороны – косые отрезки типов (3, −2), (−2, −3), (−3, 2) и (2, 3).

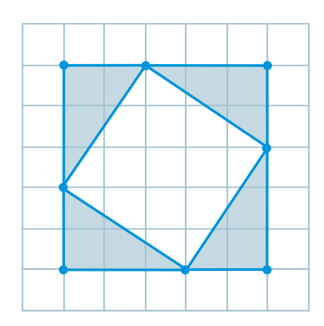
1. Как считать площади косых квадратов

Я объясню это на примере только что нарисованного квадрата. Сначала я вписываю его в прямой квадрат:

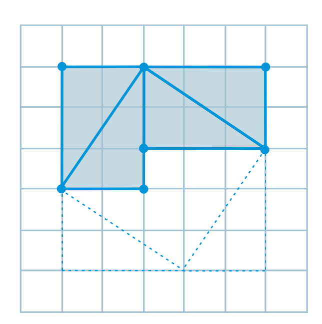


Площадь большого квадрата равна $5 \times 5 = 25$ клеточек.

Теперь вырезаю серединку:



А теперь представляю себе, что противоположные уголки подъехали друг к другу:

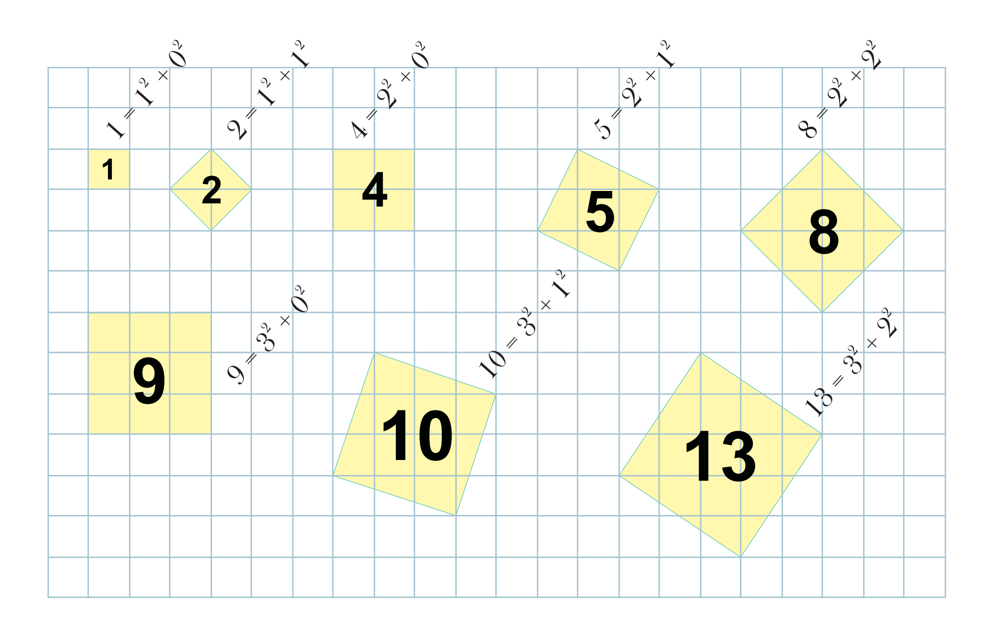


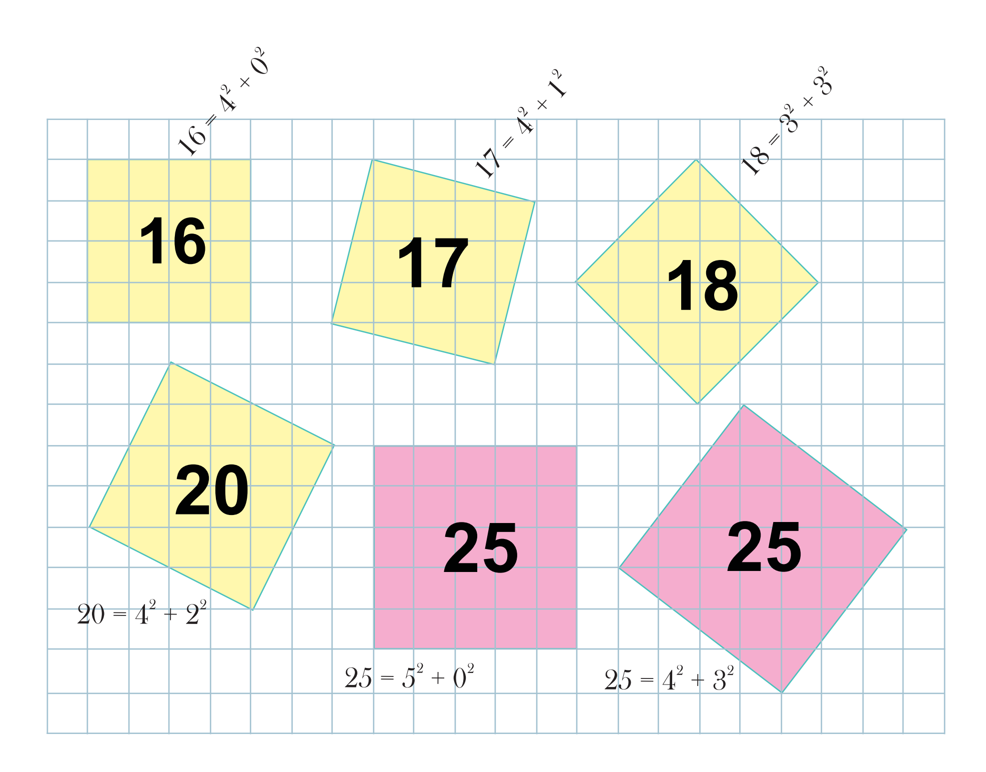
Теперь я вижу, что в каждой паре соединившихся уголков по $2 \times 3 = 6$ клеточек. Значит, вся площадь уголков равна $6 + 6 = 12$ уголков.

А площадь косого красного квадрата равна площади прямого синего, уменьшенной на площадь уголков, то есть $25 - 12 = 13$ клеточек.

Таким же способом я посчитала площади всех косых квадратов от 1 до 25.

2. Список косых квадратов и их площадей





3. Наблюдения

Если сравнить мои площади с числами из Лизиной таблицы, то видно, что:

3.1. Все площади косых квадратов – двуквадратные числа.

3.2. И наоборот, все двуквадратные числа – площади косых квадратов.

Это не случайно. Можно заметить, что:

3.3. Площадь косого квадрата типа (a, b) равна $a^2 + b^2$.

И последнее наблюдение.

3.4. Квадрат с двувидово-двуквадратной площадью (например, 25) можно уложить на клетчатую бумагу двумя разными способами.

Волшебная формула и super13



Антон Шабат
участник Клуба экспериментальной математики

Введение (***Г.Б. Шабат***)

Работа Антона требует некоторых объяснений.

Когда был освоен MAPLE, нам захотелось поработать с большими двуквадратными числами. Мы уже знали достаточно, чтобы сразу определять, двуквадратно ли, скажем, некоторое 20-значное число: MAPLE быстро раскладывает его на простые множители и, глядя только на последние две цифры этих множителей, мы сразу определяли их остатки от деления на 4.

Мы стали испытывать разные большие числа. Чего мы только не пробовали! Писали наши телефоны и телефоны наших родственников и знакомых, приписывали эти телефоны друг к другу, выписывали свои даты рождения и даты рождения наших мам, зажмуривались и по очереди набирали случайные цифры... Ничего не получалось!

Точнее, обычно получалось вот что. Наши большие числа оказывались составными[1]. Они разлагались в произведения степеней двойки и нескольких нечётных простых, из которых хотя бы одно оканчивалось на 03, 07, 11, ..., 91, 99, т.е. давало остаток 3 при делении на 4.

Это казалось цепочкой неудач, особенно с учётом усиленной формы теоремы Дирихле о простых в арифметических прогрессиях (дети, кажется, поняли её формулировку): *простых чисел вида* $4n+1$, меньших *данного* (*большого*) *числа,* ***примерно*** *столько же, сколько простых чисел вида* $4n+3$. Но когда наши простые возникали как группки простых множителей случайного большого числа, множители видов $4n+1$ и $4n+3$ почему-то всё время перемешивались!

Только после занятия, продумывая его с «взрослой» точки зрения, я понял, что ничего удивительного не происходило. Во-первых, почему нам не попадались простые числа? Согласно закону ...Гаусса – Чебышёва – ...Адамара – Валле-Пуссена, количество простых чисел, не превосходящих x, приближённо равно $\frac{x}{\ln x}$. Иначе говоря, *вероятность* того, что наугад взятое число от 2 до x окажется простым, обратно пропорциональна количеству знаков x и приближённо равна $\frac{1}{\ln x}$. В пределах наших экспериментов, скажем, при $x = 10^{20}$, это даёт $\frac{1}{20\ln 10}=0{,}021714\ldots$, т.е. около 2%.

Во-вторых, почему не попадались двуквадратные числа? Согласно гораздо менее известному факту, независимо обнаруженному Э. Ландау и С. Рамануджаном[2], количество двуквадратных чисел, не превосходящих x, приближённо равно $\frac{Kx}{\sqrt{\ln x}}$, где $K=0{,}764\ldots$ – константа Ландау-Рамануджана (в современном Интернете можно найти тысячи её знаков). Иначе говоря, *вероятность* того, что наугад взятое число от 0 до x окажется двуквадратным, обратно пропорциональна корню из количества знаков x и приближённо равна $\frac{0{,}764}{\sqrt{\ln x}}$. Для $x = 10^{20}$ это даёт $\frac{0{,}764}{\sqrt{20\ln 10}}=0{,}112\ldots$, т.е. около 11%.

Отчаявшись найти большое двуквадратное число случайно, мы стали набирать цифры подряд: 1, 12, 123, ... Дойдя до 10, стали набирать 101112... . За исключением 1234, двуквадратных среди этих чисел тоже не попадалось. И лишь при 123...1213 нам улыбнулась удача; ей и посвящён доклад Антона.

[1] Уже на докладе Антона в аудитории нашёлся (единственный) слушатель, чей десятизначный номер телефона был простым.

[2] См., например: *Shiu P.* Counting sums of Two squares: The Meissel-Lehmer Method // Mathematics of Computation. 1986. Vol. 47. № 175. P. 351–360. (http://www.jstor.org/pss/2008100).

Мы назвали эти числа по следующему принципу: 123 = super3 и т.д. На детей произвело впечатление то, что двуквадратность числа super13 была обнаружена 13 апреля. Мы не знаем, каково следующее двуквадратное число (и существует ли оно, и если да, доступно ли современным персональным компьютерам).

Я надеюсь, что из рассказанной истории видно, насколько условны границы между «детской» и «взрослой» математикой.

Работа Антона приводится в форме приготовленной им презентации доклада.

Волшебная формула и super13

Презентация Антона Шабата

1

Волшебная формула

$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(bc+ad)^2$

- Эта формула показывает, что произведение двух двуквадратных чисел – это тоже двуквадратное число
- Эта формула также помогает представить это произведение в виде суммы двух квадратов

2

Пример: super4

- Super4=1234
- 1234=2*617
  - 2 – двуквадратное число
  - 617 – простое число, дает 1 в остатке при делении на 4, то есть тоже двуквадратное
- Вычисление на Maple: $617=16^2+19^2$ (перебор двойным циклом)
- $2=1^2+1^2$
- Применяем волшебную формулу:

$1234=35^2+3^2$

3

Как мы поняли, что super13 двуквадратно

- Super13=12345678910111213
- Раскладываем на простые множители в Maple:

super13= 113*125693*869211457

- Все простые множители дают 1 в остатке при делении на 4, значит, они двуквадратные
- Значит, super13 – тоже двуквадратное!!!

4

Применение волшебной формулы к super13

- Поиск в Maple двойным циклом:

$113=7^2+8^2$ (быстро)

$125693=107^2+338^2$ (3 секунды)

$869211457= 15009^2+25376^2$ (надо ждать)

- Волшебная формула:

$113*125693=1955^2+3222^2$

- Волшебная формула второй раз:

$Super13=52418877^2+97969078^2$

5

А без волшебной формулы?

- Можно ли представить super13 как сумму двух квадратов без волшебной формулы?
- Maple требует 2 секунды для перебора 1000000 вариантов в двойном цикле

Это означает, что перебор $(11111111)^2$ вариантов займет 6172839494 секунд, или примерно 195 лет!!!

6

Заключение. Над чем думать дальше

• Что из того, что мы узнали, мы умеем объяснить?

• Что из того, что мы узнали, мы *не* умеем объяснять?

• Как строить трёхвидово-двуквадратные числа? А также четырёхвидово-двуквадратные, и вообще, многовидово-двуквадратные числа?

• Сколькими способами квадрат с многовидовой площадью кладётся на лист клетчатой бумаги?

• Есть ли двуквадратные числа среди *super*14, *super*15, ...? Вообще, какие ещё интересные двуквадратные числа можно придумать?

• Пусть дано разложение числа на простые множители. Как определить, двуквадратно ли оно? Более общий вопрос: сколькими способами (0 или больше...) его можно представить в виде суммы двух квадратов?

• Можно ли построить похожую теорию *трёхквадратных* чисел?

• Можно ли построить похожую теорию *двутреугольных* чисел?

Вернуться к содержанию

Исчисление змей для начинающих



Алексей Иванович СГИБНЕВ
учитель математики школы-интерната
«Интеллектуал» г. Москвы
sgibnev@mccme.ru

Математика – это не решение проблем,
математика – это понимание структур...
И каждый раз вы чувствуете восхищение,
когда где-то за хаосом обнаруживаете
замечательно организованную конструкцию.
М. Громов

Постановка задачи

В книжке В.И. Арнольда «Задачи для детей от 5 до 15 лет» среди других замечательных задач есть такая (номер 49):

Перестановка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *чисел* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *называется* ***змеёй*** *(длины n), если* $x_1 < x_2 > x_3 < x_4 \ldots$

Пример. Пусть s_n обозначает количество змей длины n. Тогда:

$n = 2$, только $1 < 2$, $s_2 = 1$,

$n = 3$, $\left.\begin{matrix} 1<3>2 \\ 2<3>1 \end{matrix}\right\}$, $s_3 = 2$,

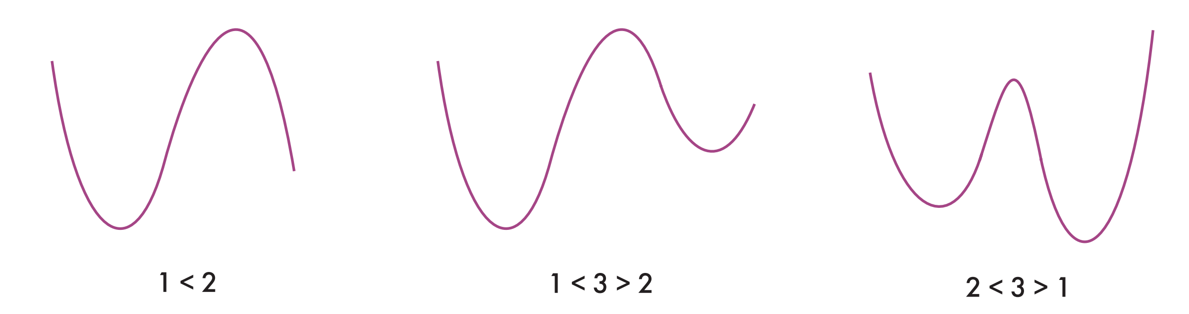
$n = 4$ $\left.\begin{matrix} 1<3>2<4 \\ 1<4>2<3 \\ 2<3>1<4 \\ 2<4>1<3 \\ 3<4>1<2 \end{matrix}\right\}$, $s_4 = 5$.

Найти число змей длины 10.

Переформулировка

Для тех, кто больше любит рисовать, а не считать, расскажем, как изображать решения задачи графически.

Напомним, что минимумы и максимумы функции вместе называются её экстремумами. Рассмотрим функции с двумя и тремя экстремумами. Пусть первый из них будет минимум. Договоримся самому маленькому экстремуму приписывать значение 1, следующему по величине – 2 и т.д. Тогда каждому из графиков соответствует змея (написана под графиком):



Упражнение. Нарисуйте графики, соответствующие змеям длины 4.

Нетрудно видеть, что каждому графику с *n* экстремумами соответствует своя змея длины *n*, а каждой змее – свой график. Единственное условие – *значения* всех экстремумов функции должны быть различны. Такие функции называются морсовскими функциями – по фамилии математика Морса. Заметьте, что графики достаточно условны: нам неважно, *насколько* один максимум или минимум выше или ниже другого – важно только, что он выше или ниже. Математики скажут: «Важен топологический тип функции». (Точно так же числа в исходной постановке задачи могут быть не подряд идущие натуральные, а любые действительные – только различные.)

Мы будем говорить то о змеях, то о функциях – когда что удобнее.

Сейчас продолжим наше исследование на языке функций. Как получить морсовскую функцию с пятью экстремумами? Надо взять морсовскую функцию с четырьмя экстремумами и пририсовать к ней справа ещё один экстремум (отличный от всех предыдущих).

Упражнение. Докажите, что таким образом можно получить **все** морсовские функции с пятью экстремумами. (*Указание*. Начало змеи – это тоже змея.)

Упражнение. Нарисуйте их графики.

У вас должно получиться 16 графиков.

Упражнение. Выпишите соответствующие змеи.

Действуя таким образом, можно теперь последовательно найти число змей длины 6, 7, и так дойти до 10. Теоретически так можно добраться и до любого числа. Однако такое решение вряд ли кого-то удовлетворит: долго, нудно, и закономерность остаётся скрытой. Хочется понять, по какому правилу возрастает число змей.

Выпишем последовательно найденные количества змей: 1, 2, 5, 16...

Сходу никакой закономерности не видно, надо думать дальше.

Давайте попробуем разбить змеи данной длины на группы, обладающие какими-нибудь свойствами.

Например, нетрудно заметить, что для змеи длины 4, заканчивающейся на «4», есть 4 «достройки» до змеи длины 5; на рисунке приведены соответствующие графики для змеи 1324.

Упражнение. Выпишите соответствующие змеи, глядя на рисунок. Как получить эти змеи, исходя непосредственно из змеи 1324 и **не** глядя на рисунок? Сформулируйте правила перенумерации.

Давайте попробуем вести отдельно учёт змей, кончающихся на разные числа.

Заметим, что из змей длины 4 две заканчиваются на «4», две на «3», одна на «2» и ни одной на «1» (почему?). Далее, из змей длины 5 ни одна змея не заканчивается на «5» (почему?). На «4» заканчивается две змеи, на «3» – четыре змеи, на «2» и «1» – по пять змей (проверьте!).

Расположим наши данные в виде двух строчек так, чтобы каждое число верхней строчки оказалось между двумя числами нижней:

Длина 4: 2 – на «4» 2 – на «3» 1 – на «2» 0 – на «1»

Длина 5: 0 – на «5» 2 – на «4» 4 – на «3» 5 – на «2» 5 – на «1»

Заметим, что в любой змее длины 5 последнее число должно быть *меньше* предпоследнего. Как мы поняли, при добавлении в змею числа остальные числа либо не изменяются либо увеличиваются на 1.

Возьмём змею длины 4, оканчивающуюся на «4». Чтобы получить змею длины 5, мы можем к ней приставить справа любое число от 1 до 4 (при необходимости перенумеровав). Например, 2314 → 23154. Тем самым любая змея длины 4, оканчивающаяся на «4», порождает одну змею длины 5, оканчивающуюся на «4», одну – на «3», одну – на «2» и одну – на «1». Изобразим это на схеме в виде стрелок:

2 2 1 0

0 2 4 5 5

Теперь возьмём змею длины 4, оканчивающуюся на «3». Чтобы получить змею длины 5, к ней можно приставить справа число от 1 до 3. (Стрелки дорисуйте сами.)

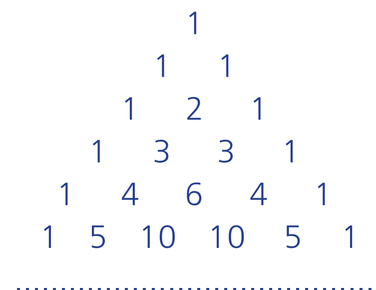
Змея длины 4, оканчивающаяся на «2», после «достройки» может кончаться на «2», а может на «1».

Обобщим: всякая змея из верхней строки на нашей схеме порождает одну змею в нижней строке *справа от себя,* и не порождает – слева.

Упражнение. Допишите в схему сверху строчку про змеи длины 3. Сформулируйте правило перехода от змей длины 3 к змеям длины 4. (Проверьте, что всякая змея длины 3 порождает змею длины 4 *слева от себя* и не порождает справа.) Сформулируйте закономерность отдельно для чётных и для нечётных длин. Допишите снизу строчку, описывающую количества змей длины 6.

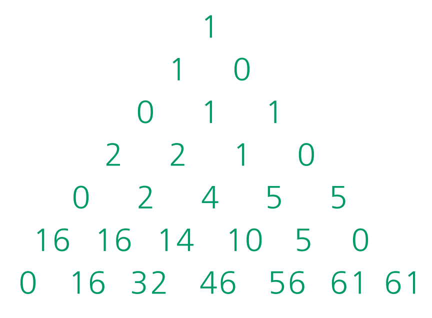
Треугольник Бернулли–Эйлера

Напомним про классический треугольник Паскаля:



Он строится так: в первой строке ставится 1, в каждой строке на одно число больше, чем в предыдущей, на боковых сторонах ставятся единицы, а каждое «внутреннее» число равно сумме двух чисел, стоящих над ним слева и над ним справа. Числа, полученные таким образом, встречаются в разных математических задачах: $(n + 1)$-я строка даёт коэффициенты одночленов в биноме $(a + b)^n$; каждое число равно количеству путей, соединяющих его с вершиной, если разрешается ходить только вниз вправо или вниз влево (почему?), и т.д.

Менее известен школьникам, но также замечателен *треугольник Бернулли-Эйлера*:



Нечётные строки записываются слева направо, чётные – наоборот. В начале строки ставится 0. Следующее число в строке получается прибавлением к данному того числа, которое стоит между ними сверху. Верхняя строка состоит из одной единицы.

Упражнение. Выпишите следующие две строчки треугольника Бернулли-Эйлера.

Упражнение. Найдите истолкование для чисел из треугольника Бернулли-Эйлера как количества путей.

Решение задачи

Внимательные читатели уже, наверное, заметили, что в треугольнике Бернулли-Эйлера возникают числа змей.

Упражнение. Докажите, что треугольник Бернулли-Эйлера строится по тем же правилам, которые мы сформулировали для чисел змей.

Поскольку начальные числа в треугольнике и в подсчёте змей совпадают и способы образования новых чисел одинаковы, то и все дальнейшие числа будут совпадать. Таким, образом, доказано

Утверждение 1. *k-е* ***справа*** *число в n-й строке треугольника Бернулли-Эйлера равно количеству змей длины n, заканчивающихся на k.*

Заметим, что в n-й строке как раз n чисел, поэтому все количества змей длины n в этой строчке указаны. Чтобы найти общее количество змей, надо просто сложить эти числа, т.е. взять крайнее число слева или справа в следующей строке. Итак, мы пришли к утверждению, которое даёт решение задачи:

Утверждение 2. *Ненулевое крайнее число в $(n + 1)$-й строке треугольника Бернулли-Эйлера равно количеству змей длины n.*

Упражнение. Подсчитайте, сколько же будет змей длины 10. (Для этого достаточно продолжить треугольник Бернулли-Эйлера до 11-й строчки.)

Сколько времени вы потратили на вычисления, минут пять? А теперь представьте себе, как долго пришлось бы выписывать все эти змеи!

Обсуждение

Обратите внимание, что мы дважды обобщали задачу. Сначала от змей длины 10 мы перешли к змеям произвольной длины. Однако пока мы возились с общим числом змей данной длины, закономерность не угадывалась. Когда же мы не побоялись усложнить задачу и вести учёт змей, оканчивающихся на разные числа, то довольно быстро обнаружилась связь между этими числами. В математике так часто бывает: правильное обобщение задачи помогает её решить.

Также нам помог перевод задачи на язык графиков.

Примечательно, что у В.И. Арнольда есть несколько «взрослых» научных работ (посвящённых исследованию функциональных топологических пространств), связанных с понятием змей – «обычных» и циклических (см. задачу 3). Именно в этих работах треугольник Бернулли-Эйлера получил своё название. Так большая наука оказывается связана с задачами, доступными школьникам.

Задачи для дальнейшего решения

1. «Альбом кривых» (коллективное задание). Постройте все 61 график морсовских функций с шестью экстремумами.

2. Проверьте, любая ли морсовская функция с двумя, тремя, четырьмя экстремумами реализуется в виде многочлена третьей, четвёртой, пятой степени соответственно.

3. Назовём циклической змеёй перестановку $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ чисел $\{1, 2, \ldots, 2n\}$, если $x_1 < x_2 > x_3 \ldots < x_{2n}$, а $x_{2n} > x_1$ (т.е. это змея длины $2n$ с дополнительным условием). Найдите число циклических змей длины $2n = 10$. *Указание.* Установите связь между ними и «обычными» змеями длины 9.

4. Асимптотический рост числа змей. Исследуйте, с какой скоростью растёт число змей s_n с ростом длины n. Можно сделать вычислительный эксперимент: реализовать на компьютере треугольник Бернулли-Эйлера для подсчёта чисел s_n (скажем, для $n < 15$) и исследовать отношение s_{n+1}/s_n: стремится ли оно к постоянной величине (какой?) или растёт неограниченно (быстрее или медленнее n?). *Примечание.* Теоретические оценки на рост s_n можно получить, используя циклические змеи из задачи 3. *Смежная задача* с красивым ответом: найти, к чему стремится доля циклических змей длины $2n$ среди всех змей длины $2n$.

5. (*Арнольд, номера 50–51.*) Вычислите суммы рядов

$$1\frac{x^1}{1!}+2\frac{x^3}{3!}+16\frac{x^5}{5!}+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}s_{2k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!},$$

$$1+1\frac{x^2}{2!}+5\frac{x^4}{4!}+61\frac{x^6}{6!}+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}s_{2k}\frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Можно сделать вычислительный эксперимент: взять первые несколько членов суммы, построить график в окрестности точки $x = 0$ и попытаться угадать функцию.

Автор благодарен проф. Г.Б. Шабату, который рассказал ему о треугольнике Бернулли-Эйлера, технике вычислительного эксперимента и многом другом, а также проф. С.К. Ландо, помогшему разобраться с асимптотикой числа змей и давшему терминологическую справку.

◀ Вернуться к содержанию



Из опыта работы кружка по геометрии[1]



Дмитрий Викторович ПРОКОПЕНКО
учитель математики физико-математической школы № 2007 г. Москвы
prokop@biochip.ru

Введение

В последние годы в российской школе наблюдается падение интереса к геометрии. Не обошла эта напасть и нашу школу. Как лечить эту болезнь? Конечно, прежде всего, на уроках. Но не только. «Застарелые случаи» (особенно в старших классах) лучше лечить на кружке. При такой форме занятий учащийся может заниматься в своём темпе (чего практически невозможно добиться на уроках), есть время для ликвидации пробелов. В статье рассказано об организации такого кружка «по ликвидации пробелов».

Это не совсем кружок в привычном понимании этого слова, скорее практикум по решению задач. В школу дети приходят с разной подготовкой, которой не всегда хватает для успешного продолжения обучения. Например, 10-классники изучают стереометрию, а базы в решении элементарных задач планиметрии нет. Поэтому иногда (а на самом деле довольно часто) приходится заниматься ликвидацией пробелов. Чем в таком случае кружковая работа отличается от работы на обычных уроках? Первое: каждый участник кружка обязан проговорить решение задачи. Второе: показать преподавателю нормальный чертёж! Третье: не реже чем один раз в 1–2 занятия на кружке должна быть решена классическая задача или задача уровня Московской математической олимпиады и выше.

[1] Автор благодарен П.В. Чулкову и А.Д. Блинкову за ценную критику статьи, Ю.А. Блинкову за предоставленные материалы для проведения нескольких занятий кружка.

Кружок предназначен для учащихся 9–11-х классов. На занятиях используется так называемая «система листков». Каждому учащемуся выдаётся листок с 7–10 задачами по определённой теме, задачи расположены по возрастанию трудности. В листок желательно включать яркие задачи, с короткими и красивыми решениями, имеющими интересные «продолжения» в других задачах. Задачи первых нескольких листков связаны с темой «Окружность». На эту тему легко подобрать красивые задачи практически любой степени трудности.

Основное время на занятии учащиеся решают задачи и рассказывают их решения преподавателю. После того как решены все задачи листка (быть может, кроме некоторых, обозначенных звёздочкой), учащиеся переходят к следующему листку и т.д.

Первое, что обнаружилось в ходе занятий, – неумение учащихся делать грамотный чертёж, который *действительно* помогает решить задачу. Поэтому вначале приходилось долго обсуждать, как правильно построить чертёж.

Вот типичная ситуация. Учащийся читает условие: «Вокруг треугольника описана окружность...», затем рисует треугольник, и только потом пытается нарисовать окружность, описанную около этого треугольника. Если при этом он пользуется циркулем, на построение чертежа уходит много времени. Гораздо проще сделать наоборот: нарисовать окружность и вписать в неё треугольник.

Или, например, в условии этой же задачи говорится о биссектрисе внутреннего угла. Можно делить угол пополам на глазок, но гораздо точнее соединить вершину и середину противолежащей дуги. И таких ситуаций довольно много.

Через некоторое время, после того как были «открыты» эти удобные правила, качество чертежей заметно улучшилось. Более того, стало возможным принимать решения некоторых задач без подробной записи – при условии, что на чертеже отображён весь ход решения, отмечены равные углы, стороны и т.д.

В начале каждого занятия обычно 10–20 минут мы обсуждаем решение наиболее трудных задач прошлого занятия. Это полезно не только для тех, кто их не решил. При обсуждении я либо показываю применение изучаемого метода, либо обращаю внимание на то, что задача состоит из двух-трёх подзадач, каждую из которых мы уже решили. Демонстрирую (что очень важно) связи между задачами, или что можно, сделав еще один шаг, получить совсем другую задачу.

Если в решении задач прошлого занятия необходимости нет, можно доказывать разными способами теоремы школьного курса или красивые и простые геометрические факты, на подробный разбор которых на уроке учителю времени не хватает. Поскольку задачи простые, в их решении принимают активное участие практически все учащиеся. Различные методы доказательства позволяют связать данную теорему с другими, указать её место в курсе геометрии и даже установить новые для учащихся факты. Бывает и наоборот: в новой конструкции можно разглядеть знакомые очертания, тогда это становится поводом для повторения и очередной тренировкой навыка видеть чертёж. Также полезно в качестве разминки решить одну-две простые олимпиадные задачи с коротким и наглядным решением.

Дополнительные построения часто выглядят для школьников как фокус, поэтому целесообразно уделять им больше внимания. Особенно эффективно работать с ними в простых задачах. С этой целью можно рекомендовать книгу И.А. Кушнира «Альтернативные способы решения задач (геометрия)», изданную в Киеве (в Москве её, к сожалению, не купишь).

Рассмотрим в качестве примера два занятия по теме «Степень точки относительно окружности». В ходе изучения темы при решении задач вводится и используется понятие радикальной оси (радикальной точки) двух (трёх) пересекающихся окружностей как множества точек, степени которых относительно окружностей равны. В итоге мы получаем мощный инструмент для доказательства того, что три точки лежат на одной прямой, три прямые проходят через одну точку и ещё один признак вписанного четырехугольника.

На первом занятии учащимся предлагаются задачи попроще, решение которых, как правило, не требует много времени. На втором занятии даются более трудные задачи.

Первое занятие

Сначала целесообразно повторить теорему о произведении отрезков секущей к окружности и теоремы о пропорциональных отрезках в круге (прямую и обратную).

Пусть *M* – некоторая точка плоскости, не лежащая на окружности ω, *AB* – секущая, проходящая через точку *M* (см. рис. 1*а*, 1*б*). Введём для удобства обозначение: $\sigma(M, \omega) = MA \cdot MB$.

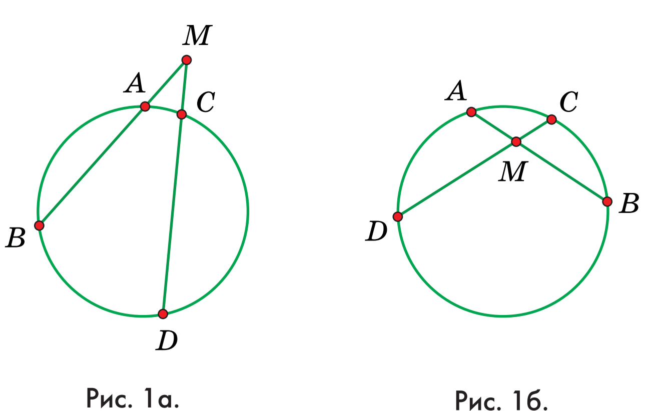


Рис. 1а. Рис. 1б.

Теорема 1. *Величина* $\sigma(M, \omega) = MA \cdot MB$ *постоянна для любых секущих, проведенных из точки M к* ω *(для любых хорд, проходящих через точку M, если точка M лежит внутри окружности).*

Очень важной является обратная теорема о секущих, поскольку она даёт нам ещё один признак вписанного четырехугольника.

Теорема 2. *Пусть прямые AB и CD пересекаются в точке M. Если выполняется равенство* $MA \cdot MB = MC \cdot MD$, *то точки A, B, C и D лежат на одной окружности.*

Доказательство проводим устно на доске.

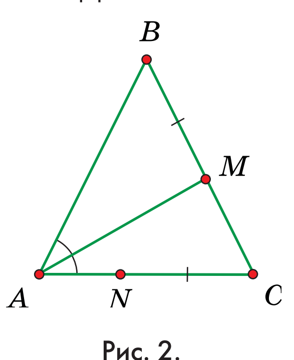


Рис. 2.

Рассмотрим пример (Киевский Международный математический фестиваль, 2008 г.). В равнобедренном треугольнике *ABC* (*AB* = *BC*) проведена биссектриса *AM*. На луче *CA* отложен отрезок *CN*, равный *BM* (см. рис. 2). Докажите, что точки *A*, *B*, *M* и *N* лежат на одной окружности.

Доказательство. По свойству биссектрисы: $\frac{CM}{BM} = \frac{AC}{AB} = \frac{AC}{BC}$. Следовательно, $CM \cdot BC = AC \cdot BM = AC \cdot CN$. Тогда по обратной

теореме о секущих (по признаку вписанного четырехугольника) точки A, N, M и B лежат на одной окружности.

Рассмотрим теперь более внимательно постоянную величину $\sigma(M, \omega)$ (произведение отрезков секущих). Как её вычислить, какой в ней геометрический смысл? Полезно рассмотреть частные случаи. Выберем наиболее удобные для подсчета положения секущей. Какие это положения?

Первое – это предельное положение, когда секущая переходит в касательную. Начнем поворачивать прямую AB вокруг точки M (см. рис. 3). С некоторого момента точки A и B (A_i и B_i) начнут сближаться, и когда они совпадут, секущая AB перейдёт в касательную AT. В этот момент $MA = MB = MT$. Величина же $\sigma(M, \omega) = MA \cdot MB$ остаётся постоянной, поэтому $\sigma(M, \omega) = MT^2$. Следовательно, $\sigma(M, \omega)$ равна квадрату касательной к окружности.

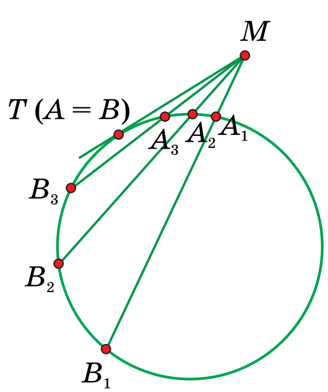


Рис. 3.

Мы доказали теорему о касательной и секущей. Надо сказать, что подобные рассуждения непривычны для школьников, поскольку здесь нет ни равенства, ни подобия треугольников. Из-за своей непривычности они вызывают повышенный интерес. Особенно учащихся впечатляет фраза «касательная – это предельное положение секущей». Проведенные рассуждения позволяют по-новому взглянуть и на такое привычное понятие, как касательная к окружности.

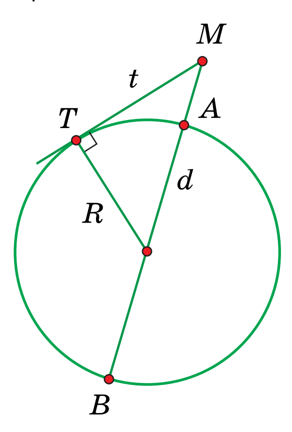


Рис. 4.

Рассмотрим еще один важный частный случай, когда секущая проходит через точку M и центр окружности. Пусть d – расстояние от точки M до центра окружности, R – её радиус (см. рис. 4). Тогда $\sigma(M, \omega) = MA \cdot MB = (d - R)(d + R) = d^2 - R^2$.

Мы подсчитали величину $\sigma(M, \omega)$ двумя способами и получили разный ответ. Нет ли здесь противоречия? Проверим. Из прямоугольного треугольника MOT (рис. 4) получаем, что $d^2 - R^2 = t^2$. Величина $d^2 - R^2$ называется степенью точки относительно окружности. Для удобства будем так называть и произведение отрезков секущих.

Здесь уместно сделать небольшое отступление и рассказать, что впервые это понятие ввёл выдающийся геометр Якоб Штейнер, коротко описать его жизнь и занятия. Полезно показать школьникам, что математикой занимались живые люди, и хорошим поводом для этого являются именные теоремы и формулы.

Заметим, что если точка M лежит внутри окружности, то величина $d^2 - R^2$ становится отрицательной, поэтому в данном случае при решении задач удобнее рассматривать величину $\sigma(M, \omega) = MA \cdot MB = R^2 - d^2$.

Выражение $d^2 - R^2$ настолько важно и так часто применяется, что выделим утверждение о нем в теорему.

Теорема 3. *Произведение отрезков секущей к окружности равно $d^2 - R^2$, где d – расстояние от точки M до центра окружности, R – её радиус.*

Теперь переходим непосредственно к листку.

Задача 1. *Две окружности пересекаются в точках A и B. Точка X лежит на прямой AB вне окружностей. Докажите, что длины всех касательных, проведенных из точки X к окружностям, равны.*

Решение. Обозначим точки касания буквами P и Q (см. рис. 5). По теореме о касательной и секущей $XP^2 = XA \cdot XB = XQ^2$. Следовательно, $XP = XQ$ для любой точки прямой AB. Значит, *степени точек прямой AB относительно этих окружностей равны*. Верно и обратное утверждение: *если степени точки X относительно пересекающихся в точках A и B окружностей равны, то она лежит на прямой AB*. Запомним это. Справедлива и более общая теорема.

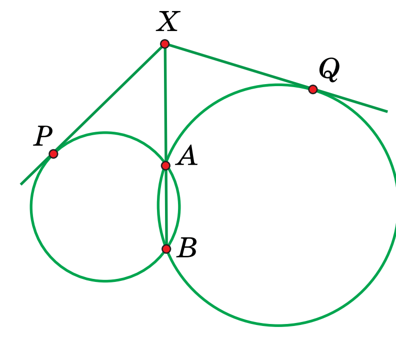


Рис. 5.

Теорема 4. *Множество точек, для которых степени относительно двух неконцентрических окружностей равны, является прямой, перпендикулярной линии их центров.*

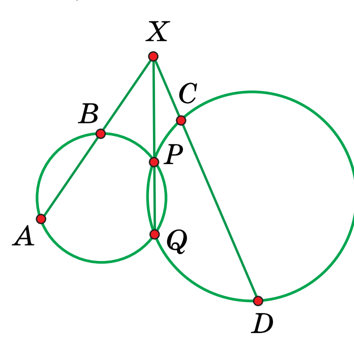


Рис. 6.

Эта прямая называется *радикальной осью* данных окружностей. Мы рассмотрели только частный случай, когда окружности пересекаются.

Здесь нужно обратить внимание учащихся, что по задаче 1 касательные, проведенные из точки X прямой AB к любой (!) окружности, проходящей через точки A и B равны. Все точки касания лежат на одной окружности.

Задача 2. *Две окружности пересекаются в точках P и Q. Точка X лежит на прямой PQ, но не на отрезке PQ (см. рис. 6). Пусть точки A и D лежат на разных окружностях. Прямые XA и XD пересекают окружности второй раз в точках B и C соответственно. Докажите, что точки A, B, C и D лежат на одной окружности.*

Решение. По теореме о секущих выполняется равенство $XA \cdot XB = XQ \cdot XP = XD \cdot XC$. Следовательно, по признаку вписанного четырёхугольника, точки A, B, C и D лежат на одной окружности.

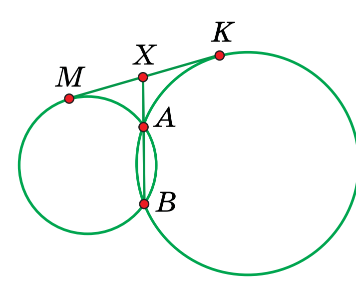


Рис. 7.

Задача 3. *Две окружности пересекаются в точках A и B; MK – общая касательная к ним (см. рис. 7). Докажите, что прямая AB делит отрезок MK пополам.*

Решение. По задаче 1 $XM = XK$.

Задача 4. *Дана окружность ω и точки P и K вне её. Через точку P проведена секущая к окружности ω, пересекающая её в точках A и B. Докажите, что положение второй точки пересечения прямой PK с окружностью γ, проходящей через точки K, A, B, не зависит от выбора секущей AB.*

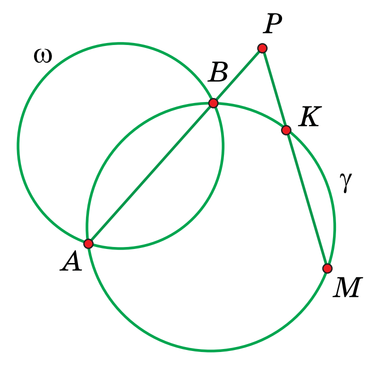


Рис. 8.

Решение. Проведём через точку P секущую PB и пусть M – вторая точка пересечения прямой PK с окружностью γ, проходящей через точки K, A, B (см. рис. 8). Тогда по

теореме о секущих $PK \cdot PM = PB \cdot PA$. Последнее произведение есть степень точки P относительно окружности ω и не зависит от выбора секущей PB. Следовательно, величина $PK \cdot PM$ постоянна для любых секущих PA, проведённых к окружности ω. Поскольку точки P и K фиксированы, то и длина отрезка PM не меняется, т.е. точка M тоже фиксирована.

Задача 5. *Окружность делит каждую из сторон треугольника на три равные части. Докажите, что этот треугольник правильный.*

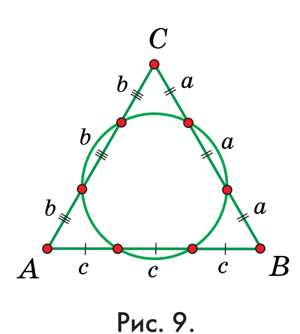


Рис. 9.

Решение. Пусть длины отрезков, высекаемых окружностью на сторонах AB, BC и AC будут c, a и b соответственно (см. рис. 9). Рассмотрим секущие к окружности, проходящие через точку A. Тогда $b \cdot 2b = c \cdot 2c$. Следовательно, $b = c$. Аналогично можно доказать, что $a = c$. Поскольку $a = b = c$, то треугольник правильный.

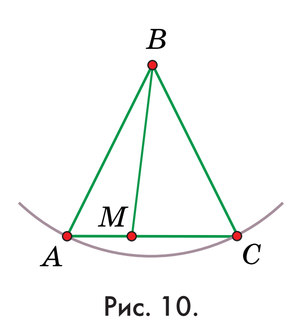


Рис. 10.

Задача 6. *Доказать, что, если на основании AC равнобедренного треугольника ABC взять произвольную точку M, то $BC^2 - BM^2 = AM \cdot CM$.*

Решение. Рассмотрим окружность с центром в точке B и радиусом BC (см. рис. 10). Тогда по теореме 3 степень точки M равна $AM \cdot CM = BC^2 - BM^2$.

Заметим, что здесь мы использовали ещё один характерный приём, а именно построили вспомогательную окружность, которая довольно часто выручает в задачах на равнобедренный треугольник.

Задача 7. *В угол вписаны две окружности. Одна из них касается сторон угла в точках A и B, а другая в точках C и D (см. рис. 11). Докажите, что прямая AD высекает на этих окружностях равные хорды.*

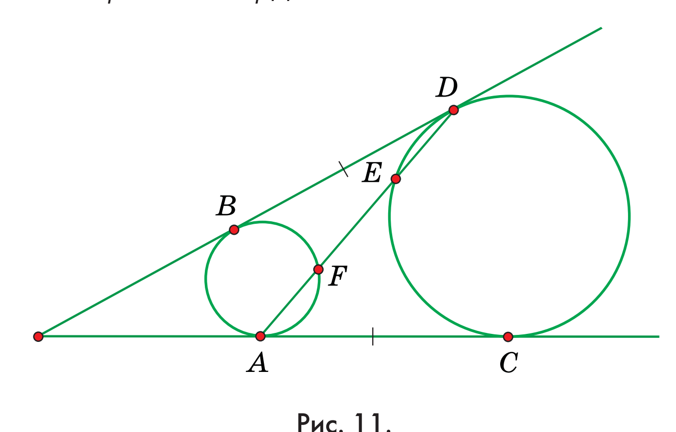


Рис. 11.

Решение. Степень точки A относительно второй окружности равна $AE \cdot AD = AC^2$. Аналогично для точки D: $DF \cdot DA = BD^2$. Поскольку $AC = BD$ (почему?), то $AE = DF$. Следовательно, $AF = DE$.

Задача 8. *Доказать, что все окружности, проходящие через данную точку A и пересекающие данную окружность в диаметрально противоположных точках, проходят одновременно через некоторую точку P, отличную от A.*

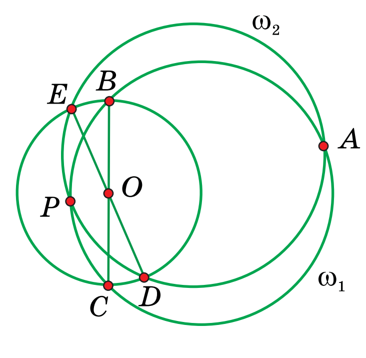


Рис. 12.

Решение. Рассмотрим две таких окружности ω_1 и ω_2, которые пересекают данную окружность в точках *B*, *C*, *D* и *E* соответственно (см. рис. 12). Пусть они второй раз пересекаются в точке *P*. Степень точки *O* относительно первой и второй окружности равна R^2. Следовательно, $O \in AP$ (по замечанию к задаче 1), при этом $OP \cdot OA = R^2$. Поскольку *OA* и *R* постоянны, то и точка *P* на прямой *AO* фиксирована.

Второе занятие

Перед вторым занятием можно доказать формулу длины биссектрисы:

$$CL^2 = a \cdot b - a' \cdot b',\text{ где } AC = a,\ BC = b,\ AL = a',\ BL = b'.$$

Во-первых, эту формулу полезно знать, во-вторых, её доказательство – лишняя демонстрация метода. Наконец, главное в том, что одна из целей кружка – научить решать задачи. Часто после разбора сложной задачи у школьников остаётся впечатление, что лектор (учитель) – это фокусник, который умело извлекает «из рукава» нужные формулы и теоремы. Решение они поняли, но от учащихся осталось скрытым, как можно самому догадаться до такого решения. Проблема в том, что учащимся почти всегда показывают наиболее короткое и рациональное решение, не объясняя причин, по которым нужно выполнять те или иные действия. Например, в самом начале приведённого ниже доказательства говорится: «Построим точки *K* и *N*, симметричные...» Почему их надо строить? Да ещё симметричные чему-то?

Вернёмся к задаче. С чего начать? Выражение *ab* в формуле должно наводить на мысль (точнее, на вопрос): «Где такое выражение встречается?» Наверное, оно связано с площадью. А квадрат высоты в прямоугольном треугольнике равен произведению проекций катетов. Не очень понятно, где здесь прямоугольные треугольники с нужными сторонами. Что ещё? – Степень точки. Хорошо, попробуем. Но у нас отрезки лежат на разных прямых, и окружности нет. Это даёт план на два ближайших хода.

Заметим, чтобы получить произведение секущих *ab*, отрезки надо отложить на одну прямую. Это ещё одна идея – спрямление (в данном случае – симметрия относительно биссектрисы), которая учащимся уже должна быть знакома. Найдём эту окружность. Проведем её через концы полученных отрезков. Заметим, что таких окружностей много. Можно выбрать ту, которая нам больше подходит – это мы уже обсуждали в решении задачи 1. Далее, поскольку в формуле есть ещё произведение $a'b'$, то нужна еще одна окружность. Нельзя ли эти окружности совместить? Далее посмотрим, что получится.

Вот такой примерно план рассуждений и набор вопросов. Поэтому логично сначала дать школьникам возможность пообсуждать эту задачу, задать им вопросы, а потом уже перейти к доказательству.

Доказательство. Пусть для определённости $BC > AC$. Построим точки K и N, симметричные точке A относительно биссектрисы CL и точки L соответственно (см. рис. 13). Тогда $CK = a$ и $LN = a'$. Обозначим окружность, описанную около треугольника KNB через ω, степени точек C и L относительно окружности ω, через s и s'.

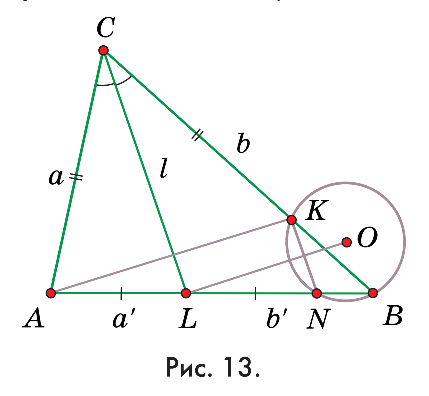


Рис. 13.

Тогда по известной формуле: $s = ab = CO^2 - R^2$ и $s' = a'b' = LO^2 - R^2$, где O – центр, а R – радиус окружности ω. Найдём разность $s - s'$: $ab - a'b' = CO^2 - LO^2$.

Докажем, что угол CLO – прямой. Длины отрезков AL, LK, и LN равны, следовательно, $AK \perp KN$. Окружность с центром в точке L и радиусом LN и окружность ω имеют общую хорду KN. Следовательно, $LO \perp KN$. Тогда LO параллельно AK и $AK \perp CL$. Значит, $LO \perp CL$. По теореме Пифагора $l^2 = CO^2 - LO^2 = ab - a'b'$.

Приведём задачи второго листка.

1. *Доказать, что радикальные оси трёх неконцентрических окружностей пересекаются в одной точке или параллельны.*

2. *Две окружности касаются в точке K внешним образом. Через эту точку проведена прямая, которая, пересекаясь с окружностями, высекает хорды KP и KQ. Из точек P и Q проведены к окружностям касательные PT_1 и QT_2, где T_1 и T_2 – точки касания. Докажите, что $PT_1^2 + QT_2^2 = PQ^2$.*

3. *Вершина C прямого угла треугольника ABC лежит внутри окружности с центром O и радиусом R, проходящей через концы гипотенузы AB. CH – высота треугольника ABC. На прямой AB взята точка K так, что $KH = OH$. Найдите CK.*

4. *В треугольнике ABC угол B – тупой. Постройте на AC точку D такую, что $AB^2 = AD \cdot AC$.*

5. *Постройте на данной прямой точку, из которой данный отрезок виден под наибольшим углом.*

6. *Вневписанные окружности треугольника ABC, касающиеся сторон BA и BC отразили относительно середин этих сторон. Докажите, что общая хорда получившихся окружностей проходит через точку B.*

7. *В треугольнике ABC точки M и N – середины сторон AB и AC, AH – высота. Окружности, описанные вокруг треугольников BHN и CHM пересекаются вторично в точке P. Докажите, что отрезок PH проходит через середину MN.*

Задачи №№ 6 и 7 взяты из Всероссийских олимпиад 2005 (10 класс) и 2007 годов (9 класс) соответственно.

Что в результате?

Использование набора средств, ключевых задач и небольшой теории, развитой при изучении темы «Степень точки относительно окружности» позволяет участникам кружка решать задачи и на олимпиадах разного уровня. В качестве примера рассмотрим задачу из Турнира городов (2008 г., 11 класс).

Дана неравнобокая трапеция $ABCD$. Точка A_1 – это точка пересечения описанной окружности треугольника BCD с прямой AC, отличная от C. Аналогично определяются точки B_1, C_1, D_1. Докажите, что $A_1B_1C_1D_1$ – тоже трапеция.

Решение получено активной участницей кружка Стекловой Лидией.

Пусть P – точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$ (см. рис. 14). Заметим, что точки A_1, B, C, D лежат на одной окружности, поэтому $A_1P\cdot PC=BP\cdot PD$[2]. Для остальных четвёрок точек записываем аналогичные равенства:

$$C_1P\cdot PA=BP\cdot PD,\ B_1P\cdot PD=AP\cdot PC,\ D_1P\cdot PB=AP\cdot PC.$$

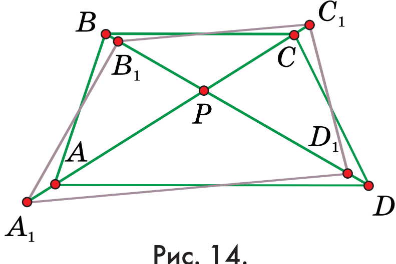


Рис. 14.

Разделив первое равенство на второе, а третье на четвёртое, получим: $\dfrac{A_1P\cdot PC}{C_1P\cdot PA}=1$, $\dfrac{B_1P\cdot PD}{D_1P\cdot PB}=1$. Отсюда следует, что $\dfrac{A_1P}{C_1P}=\dfrac{AP}{CP}$ и $\dfrac{B_1P}{D_1P}=\dfrac{BP}{DP}$. Из подобия треугольников APD и CPB следует равенство: $\dfrac{AP}{CP}=\dfrac{DP}{BP}$.

Следовательно, $\dfrac{A_1P}{C_1P}=\dfrac{D_1P}{B_1P}$. А так как $\angle B_1PC_1=\angle A_1PD_1$, то треугольники B_1PC_1 и A_1PD_1 подобны. Получается, что прямые A_1D_1 и B_1C_1 параллельны. Докажем, что прямые A_1B_1 и C_1D_1 не параллельны. Предположим, что они параллельны. Тогда четырёхугольник $A_1B_1C_1D_1$ – параллелограмм. Следовательно, P – середина A_1C_1 и B_1D_1. Получается, что P – середина AC и BD. Следовательно, $ABCD$ – параллелограмм, что противоречит условию. Значит, прямые A_1B_1 и C_1D_1 не параллельны. То есть $A_1B_1C_1D_1$ – трапеция, что и требовалось доказать.

Задачи листков обычно связаны между собой. Рассмотрим заключительные задачи листка «Свойства ортоцентра».

7. *Доказать, что произведение длин отрезков, на которые ортоцентр разбивает высоты треугольника, одинаково для всех высот.*

8. *Если две окружности построены на двух чевианах как на диаметрах, то их точки пересечения и ортоцентр лежат на одной прямой* (*см. рис.* 15).

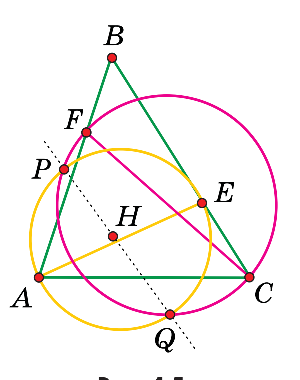


Рис. 15.

В доказательстве задачи 7 используется задача 1 того же листка: «Точка, симметричная ортоцентру относительно стороны, принадлежит описанной окружности», а также факт, что искомое произведение в два раза меньше, чем степень ортоцентра относительно описанной окружности.

В задаче 8 (с помощью задачи 7) надо доказать, что степени ортоцентра относительно этих окружностей равны. Решение многих подобных задач начинается со слов «Рассмотрим степень точки M относительно окружности ω». Часто именно в этом и состоит основная сложность – увидеть эту точку и окружности. А это и есть тема предыдущего листка.

Тем, кто решил эти задачи, предлагается подумать, что будет в случае трёх окружностей. Результат они должны сформулировать самостоятельно. На учеников производит сильное впечатление противоречие между сложностью задачи и тем, что они решили её за несколько минут. Ученики при этом забывают, что сначала они решили целый листок на степень точки, а потом все задачи о свойствах ортоцентра. Мы надеемся, что такая эмоциональная составляющая занятий способствует повышению интереса к геометрии.

◄ **Вернуться к содержанию**

[2] Это и есть степень точки P относительно окружности. Важно то, что ученица знала, что искать. Нарисовать полный чертёж, и по нему решить задачу, по-моему, просто невозможно.

«Площади и объёмы»: краткое описание учебного курса



Андрей Иванович ЩЕТНИКОВ
зам. директора Центра образовательных проектов «Сигма»,
руководитель проекта «Школа Пифагора», г. Новосибирск
schetnikov@ngs.ru

Введение

Восьмичасовой учебный курс «Площади и объёмы» был прочитан на Летней школе развития «Пифагор 2009». Слушателями курса были в основном школьники, перешедшие в 8–9-й класс; к ним присоединилось также несколько старшеклассников. Курс вёлся в лекционной форме; некоторые задачи по ходу курса решались и объяснялись у доски самими слушателями.

Основная цель курса заключалась в том, чтобы показать, как строится некая научная теория, изучение которой растянуто в школьном курсе математики на много лет. При этом важно было показать, что теория — это не просто набор отдельных теорем и формул: это предварительный план охвата предметной области и осуществление этого плана, это система методов, связывающих тело теории в единое целое.

Теория, которую мы рассматриваем в курсе, в основном была создана древнегреческими математиками, от Пифагора до Архимеда. Её цель была сформулирована геометрами пифагорейской школы: научиться сопоставлять между собой разные плоские фигуры и объёмные тела.

В основу курса положена восходящая к древним грекам идея противопоставления практического искусства измерений («метретики») и теоретической геометрии. Искусство измерений основано на знании формул: «Площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту», «Объём шара равен $\frac{4}{3}\pi R^3$» и т.д. Теоретическая геометрия интересуется не формулами — но связями и отношениями между геометрическими фигурами и телами: «Все параллелограммы на одном основании и под одной высотой равновелики», «Объём шара составляет $\frac{2}{3}$ от объёма описанного около него цилиндра» и т.д. Можно сказать, что формулы абстрактны, поскольку оторваны от движения породившей их мысли; отношения же конкретны, ибо связаны с конструктивными преобразованиями и доказательствами теорем.

В обсуждении теорем, доказательства которых основаны на применении бесконечно малых величин и предельных переходов, упор был сделан на исходные интуитивные идеи этих доказательств. Необходимость строгих доказательств, конечно же, обсуждалась со школьниками, но сами эти доказательства выносились за рамки данного курса в другие курсы, читаемые на наших летних и зимних школах («Метод исчерпывания», «Что такое математическая строгость?» и т.д.).

Точно так же не обсуждались аксиоматические определения площади и объёма, поскольку эти понятия предполагались интуитивно очевидными, и считалось, что обсуждение целей и принципов математической аксиоматики должно представлять собой задачу отдельного учебного курса.

Курс был предварён следующей аннотацией:

> Сравнение и измерение площадей и объёмов — одна из древнейших задач геометрии. В школьном курсе эта тема растянута на многие годы, мы же постараемся за четыре занятия осветить всю её целиком: от простейших задач, связанных с площадями прямолинейных фигур, до объёма шара. Мы не будем лезть в дебри многочисленных формул и сложных выкладок, но постараемся рассмотреть ключевые идеи и самые красивые доказательства.

Кроме того, на устном представлении курса школьникам было сказано, что мы не выйдем за пределы школьной геометрии — но зато на многие факты этой самой школьной геометрии посмотрим с весьма непривычной точки зрения.

План курса

0. Задача курса. Противопоставление «искусства измерения», основанного на знании формул, и теоретической геометрии, имеющей дело с теоремами, устанавливающими связи между различными фигурами и телами.

1. Пифагорейская «теорема о бабочке»: закрашенные прямоугольники по обе стороны от диагонали равновелики (рис. 1).

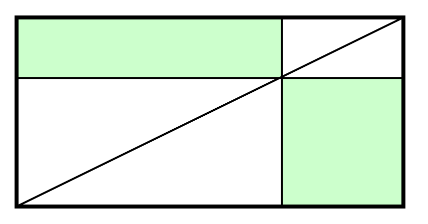


Рис. 1.

2. Как сравнивать площади прямоугольников напрямую, если ни один их них не помещается внутри другого? Можно дробить прямоугольники на мелкие части и подсчитывать число частей; но можно ли обойтись без счёта? Техника сравнения, основанная на «теореме о бабочке» (рис. 2).

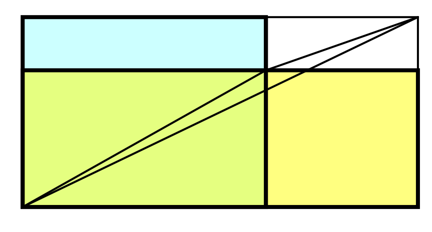


Рис. 2.

3. Серия теорем о площади параллелограмма, треугольника, трапеции; вывод соответствующих формул. Теоремы: а) «Все параллелограммы на одном основании и под одной высотой равновелики» (достраиваем параллелограмм до трапеции и отрезаем пристроенный треугольник в другом месте); б) «Все треугольники на одном основании и под одной высотой равновелики»; в) «Трапеция равновелика

параллелограмму с той же высотой и основанием, равным полусумме оснований трапеции» (доказательства с пристраиванием перевёрнутой трапеции и с перекраиванием трапеции в параллелограмм).

4. Теорема Пифагора и разные способы её доказательства, основанные на технике перекраивания фигур:

а) двойное разрезание квадрата (рис. 3).

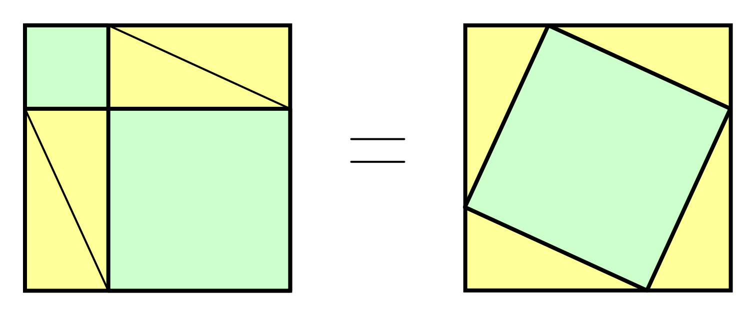


Рис. 3.

б) «пифагоровы штаны» — доказательство Евклида (рис. 4).

в) «пифагоровы штаны» — разрезание квадрата на большем катете (рис. 5).

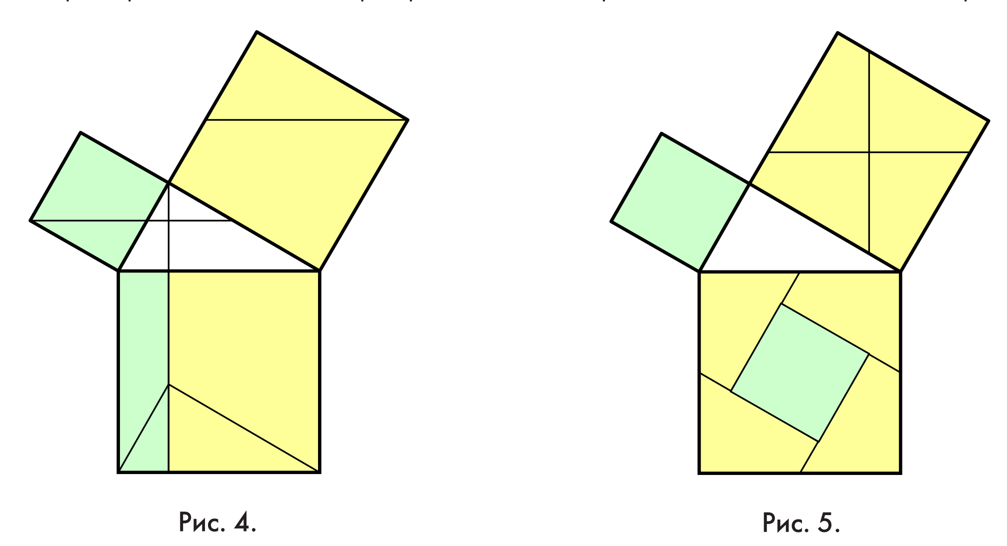


Рис. 4. Рис. 5.

5. Теорема Пифагора позволяет задать геометрическую операцию «сложения квадратов». А можем ли мы геометрически складывать прямоугольники, получая из двух прямоугольников один? Два возможных подхода: а) приводим все прямоугольники к одному основанию, используя теорему о «бабочке»; б) превращаем прямоугольники в квадраты и складываем квадраты с помощью теоремы Пифагора.

6. Сведение задачи о квадрировании прямоугольника к задаче о построении среднего геометрического между двумя данными отрезками. Решение этой задачи.

7. Задача квадрирования многоугольника: «Как превратить произвольный многоугольник в равновеликий ему квадрат?» План решения: разрезаем многоугольник на треугольники; каждый треугольник превращаем в прямоугольник; все прямоугольники приводим к одному основанию и складываем; квадрируем получившийся прямоугольник.

8. Проблема превращения прямоугольного параллелепипеда в равновеликий ему куб. Возникающие при этом трудности.

9. Окружность и круг. Базовая лемма: «Длины окружностей относятся как радиусы, а площади кругов — как квадраты радиусов». Основная теорема: «Круг равновелик прямоугольнику, основание которого составляет $\frac{1}{2}$ от длины окружности, а высота равна радиусу круга». Её доказательство: а) разрезанием на «бесконечно узкие» треугольники (рис. 6, *а*); б) раскатыванием «бесконечно узких» колечек (рис. 6, *б*). Число π и проект его вычисления; формула для площади круга.

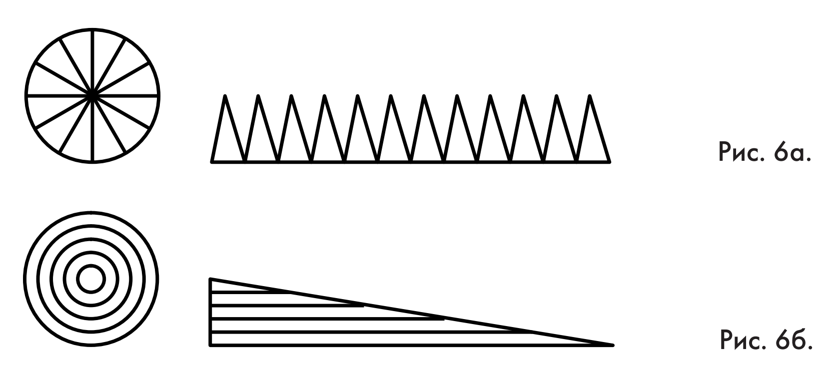


Рис. 6а.

Рис. 6б.

10. Параллелепипед как объёмный аналог параллелограмма. Основная теорема: «Все параллелепипеды на одном основании и под одной высотой равновелики». Техника добавления и отнятия призм, аналогичная технике добавления и отнятия треугольников для параллелограмма. Обобщение теоремы на случай произвольной призмы.

11. Многогранники. Разрезание произвольного выпуклого многогранника на пирамиды (на самом деле условие выпуклости совсем не обязательно). Ключевая роль треугольной пирамиды в построении теории.

12. Задача сопоставления пирамиды и призмы, находящихся на одном основании и под одной высотой. Ещё одна специфическая трудность: пирамиду произвольного вида не удаётся перекладыванием частей превратить в равновеликую ей призму. Специальные пирамиды, составляющие $\frac{1}{6}$ либо $\frac{1}{3}$ часть куба, и гипотеза о том, что всякая пирамида составляет $\frac{1}{3}$ от призмы с теми же основанием и высотой.

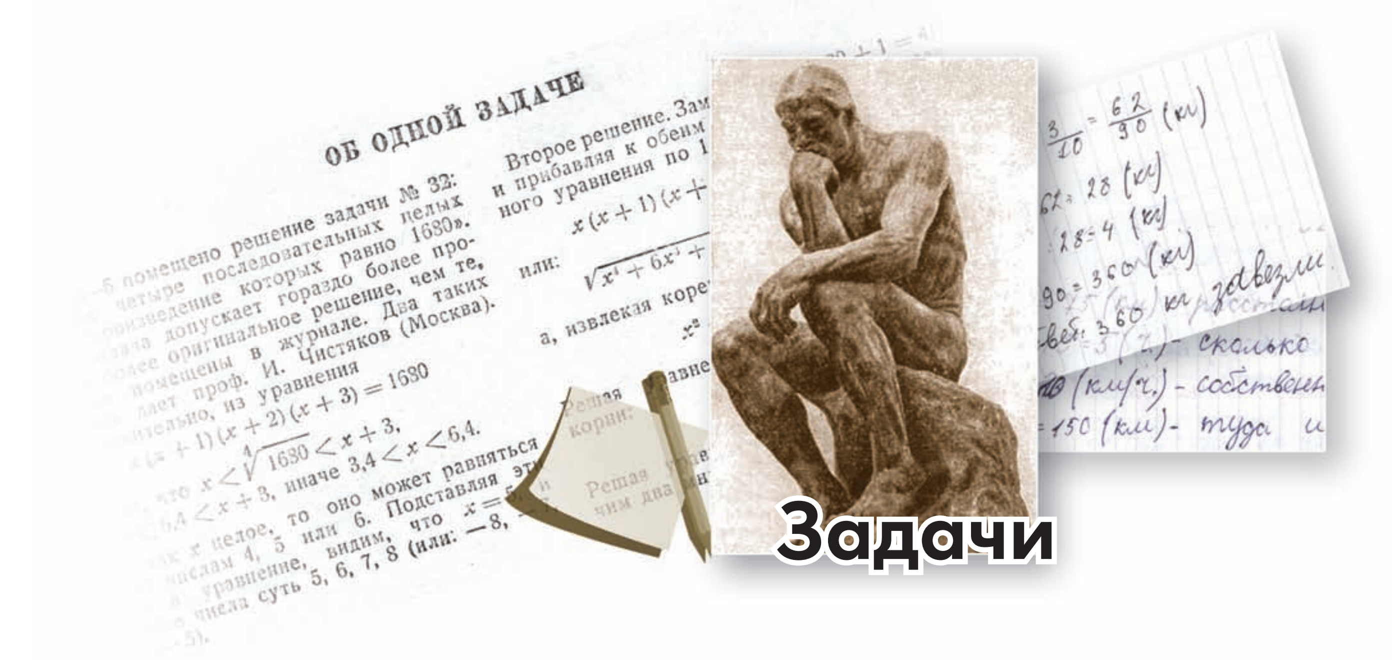
13. Метод Кавальери — сначала для площадей параллелограммов, а затем для объёмов параллелепипедов и призм общего вида: представление о пачке бумаги, состоящей из бесконечного числа бесконечно тонких листов.

14. Теорема о том, что объёмы пирамид под одной высотой относятся так же, как их основания; её доказательство методом Кавальери. Следствие: «Объём пирамиды составляет $\frac{1}{3}$ от объёма призмы с теми же основанием и высотой». Обобщение: «Объём конуса составляет $\frac{1}{3}$ от объёма описанного цилиндра».

15. Теорема Архимеда: «Объём шара составляет $\frac{2}{3}$ от объёма описанного цилиндра»; её доказательство методом Кавальери.

16. Две формулировки теоремы о площади сферы: а) «Площадь сферы равна площади боковой поверхности описанного цилиндра»; б) «Площадь сферы равна учетверённой площади большого круга». Набросок доказательства.

Вернуться к содержанию



Задачи

Новые задачи

Решения задач и новые задачи необходимо присылать по электронному адресу: zadachi-polinom@mail.ru на имя Олега Александровича Файнштейна.

1. В равнобедренном треугольнике ABC ($AC = AB$) угол CAB равен 100°, BD – биссектриса угла ABC. Докажите, что $AD + BD = BC$.

A.R. Baleanu (Румыния)

2. В произвольном треугольнике ABC точка O_1 симметрична точке O – центру описанной окружности относительно центра тяжести G этого треугольника. Докажите, что $O_1A^2 + O_1B^2 + O_1C^2 = 3R^2$, где R – радиус описанной окружности треугольника ABC.

О.А. Файнштейн (Лейпциг, Германия)

3. Треугольник ABC прямоугольный, a и b – длины его катетов, c – длина гипотенузы. Углы A, B и C противолежащие соответственно сторонам длины a, b и c. Докажите, что:

а) $\cos\frac{\angle A}{2}\cos\frac{\angle B}{2}\cos\frac{\angle C}{2}-\sin\frac{\angle A}{2}\sin\frac{\angle B}{2}\sin\frac{\angle C}{2}=\frac{1}{2}$,

б) $a^3 + b^3 + c^3 = ab(a + b) + ac(a + c) - bc(b + c)$.

Журнал «Matematik Magasinet», № 42, 2008 (Дания)

4. Решите уравнение: $\cos^2 x-\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}=\sin^2 2x$.

5. Найдите все такие натуральные n, при которых выражение $8^n - 3^n - 6^n + 1$ делится на 10.

Журнал «Matematik Magasinet», № 41, 2008 (Дания)

6. Докажите, что для всех $a_1, a_2, \ldots, a_n \in (0; +\infty)$ и таких, что $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$, справедливо неравенство

$$\left(a_1+\frac{a_2}{a_3}\right)^2+\left(a_2+\frac{a_3}{a_4}\right)^2+\ldots+\left(a_n+\frac{a_1}{a_2}\right)^2\geq 4n.$$

Журнал «Matlap», № 3, 2005 (Румыния)

Просьба присылать решения **до 1 октября 2009 г.**

Решения задач, помещённых в № 2 за 2009 год

1. В прямоугольнике $ABCD$ сторона $AB = a$, сторона $BC = b$. Точка E – середина стороны CD. Диагональ BD и отрезок AE пересекаются в точке F. Найдите отношение площади треугольника DEF к площади прямоугольника $ABCD$.

Ответ: 1 : 12.

Решение. Рассмотрим общий случай. Пусть точка E выбрана на CD так, что $DE : DC = 1 : n$, где n – целое положительное число (см. рис. 1). Треугольники DFE и ABF подобны, поэтому $\frac{AB}{DE} = \frac{h_1}{h_2}$.

Последнее равенство можно переписать, как $\frac{n}{1} = \frac{h_1}{h_2}$, откуда $h_1 = nh_2$.

Из рисунка видно, что $h_1 = b - h_2$. Подставив в предыдущее соотношение, получим:

$$h_2 = \frac{1}{n+1}b.$$

Площадь треугольника DEF равна:

$$S_{DEF} = \frac{1}{2}DE \cdot h_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{n}\cdot\frac{b}{(n+1)} = \frac{1}{2n(n+1)}ab.$$

Рис. 1.

Площадь прямоугольника $ABCD$ равна $S_{ABCD} = ab$.

Из последних двух соотношений получаем, что $S_{DEF} : S_{ABCD} = 1 : 2n(n+1)$.

Если $n = 2$, имеем данную задачу. Искомое отношение площадей равно 1 : 12.

2. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2xy + 3yz = 100, \\ 4yz - 5xz = 42, \\ 6xz - 7xy = 28. \end{cases}$$

Ответ: (2; 4; 7), (–2; –4; –7).

Решение. Введём обозначения: $u = xy$, $v = yz$, $t = xz$.

Исходная система примет вид:

$$\begin{cases} 2u + 3v = 100, \\ 4v - 5t = 42, \\ 6t - 7u = 28. \end{cases}$$

Выразим из второго и третьего уравнений системы переменную t, получим:

$$t = \frac{4v - 42}{5}, \quad t = \frac{7u + 28}{6}.$$

Приравняв эти соотношения, получим новое уравнение относительно u и v:

$$35u - 24v = -392.$$

Решая совместно первое уравнение системы с этим уравнением, имеем: $u = 8$, $v = 28$. Подставив одно из этих значений в выражение для определения переменной t, найдём $t = 14$.

Таким образом, мы получили: $xy = 8$, $yz = 28$, $xz = 14$.

Перемножив соответственно левые и правые части этих равенств, имеем $x^2y^2z^2 = 4^2 \cdot 14^2$, откуда следует, что $xyz = 56$ или $xyz = -56$.

Разделив каждое из этих соотношений на $xy = 8$, $yz = 28$, $xz = 14$, окончательно получим, что данная система имеет два решения (2; 4; 7), (–2; –4; –7).

3. Пусть a, b и c – целые числа и $a^2 + 2bc = 0$. Покажите, что выражение $(b^2 + 2ac)^3 + (c^2 + 2ab)^3$ есть квадрат некоторого целого числа.

Решение. Из условия $a^2 + 2bc = 0$ следует, что a – чётное число и $a^3 = -2abc$, $a^3b^3 = -2ab^4c$, $a^3c^3 = -2abc^4$.

Раскрыв скобки в заданном выражении, получим:

$(b^2 + 2ac)^3 + (c^2 + 2ab)^3 = b^6 + c^6 + 24a^2b^2c^2 + 8a^3b^3 + 6b^4ac + 8a^3c^3 + 6c^4ab.$

С учётом соотношений $a^3 = -2abc$, $a^3b^3 = -2ab^4c$, $a^3c^3 = -2abc^4$ это выражение примет вид:

$$b^6 + c^6 + 6a^6 + 5a^3b^3 + 5a^3c^3 = b^6 + c^6 + \frac{25}{4}a^6 - \frac{1}{4}a^6 + 5a^3b^3 + 5a^3c^3.$$

Из условия $a^2 + 2bc = 0$ получаем, что $a^6 = -2b^3c^3$, $-\frac{1}{4}a^6 = 2b^3c^3$. Подставив эти выражения в предыдущее соотношение, имеем

$$b^6 + \frac{25}{4}a^6 + c^6 + 5a^3b^3 + 2b^3c^3 + 5a^3c^3 = \left(b^3 + \frac{5}{2}a^3 + c^3\right)^2.$$

Так как число a чётное, то окончательно получим, что $(b^2 + 2ac)^3 + (c^2 + 2ab)^3 = (b^3 + 20k^3 + c^3)^2$, что и требовалось доказать.

4. На окружности ω произвольным образом расположены три точки A, B и C. Обозначим через h_a и h_b длины перпендикуляров, опущенных из точки C на касательные к этой окружности, проходящие соответственно через точки A и B. Через h обозначим длину перпендикуляра, проведённого из точки C на AB.

Докажите, что $h^2 = h_a \cdot h_b$.

Решение. Обозначим основания перпендикуляров, проведённых из точки C через D, E и F (см. рис. 2). Рассмотрим треугольник ABC и пусть в нём величины углов A, B и C равны α, β и γ. Тогда $\angle CBF = \alpha$, $\angle EAC = \beta$, как углы, измеряемые половиной одной и той же дуги.

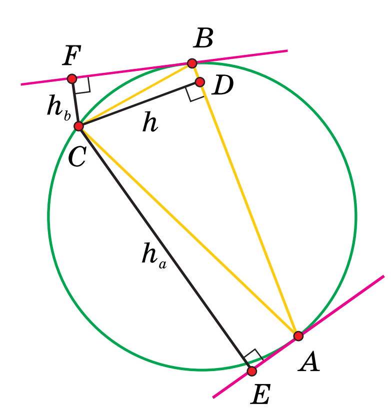
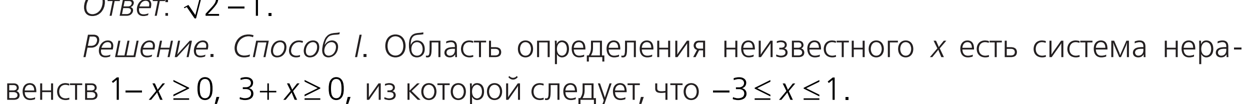


Рис. 2.

Из треугольника ABC: $h = AC\sin\alpha$, $h = BC\sin\beta$. Из треугольника CEA: $h_a = AC\sin\beta$. Из треугольника CBF: $h_b = BC\sin\alpha$.

Сравнивая эти соотношения, получаем $h^2 = h_a \cdot h_b$.

5. Решить уравнение $x\sqrt{1-x} + \sqrt{3+x} = 2\sqrt{1+x^2}$.



Ответ. $\sqrt{2} - 1$.

Решение. *Способ I*. Область определения неизвестного x есть система неравенств $1 - x \geq 0$, $3 + x \geq 0$, из которой следует, что $-3 \leq x \leq 1$.

Обозначим $u = \sqrt{1-x}$, $v = \sqrt{3+x}$. Подставив эти соотношения в исходное уравнение, получим следующую систему уравнений:

$$xu + v = 2\sqrt{1+x^2}, \quad u^2 + v^2 = 4.$$

Выразив переменную v из первого уравнения и подставив её во второе уравнение, имеем:

$$u^2+\left(2\sqrt{1+x^2}-xu\right)^2=4.$$

После преобразований получаем:

$$u^2\left(1+x^2\right)-4xu\sqrt{1+x^2}+4x^2=0,$$

или равносильное уравнение:

$$\left(u\sqrt{1+x^2}-2x\right)^2=0,$$

откуда следует, что

$$u=\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Приравняв между собой оба значения $u=\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$, $u=\sqrt{1-x}$, получим уравнение относительно неизвестной x:

$$\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}=\sqrt{1-x}.$$

После преобразований это уравнение примет вид: $x^3+3x^2+x-1=0$. Оно имеет корень $x=-1$ и его можно представить в виде:

$$(x+1)(x^2+2x-1)=0,$$

откуда находим еще два решения: $x=-\left(\sqrt{2}+1\right)$, $x=\sqrt{2}-1$.

Как видно, все три решения входят в ОДЗ, но проверкой убеждаемся, что только значение $x=\sqrt{2}-1$ удовлетворяет заданному уравнению.

Способ II. Пусть $\vec{m}(x;1)$ и $\vec{n}\left(\sqrt{1-x};\sqrt{3+x}\right)$. Тогда $\left|\vec{m}\right|=\sqrt{x^2+1}$, $\left|\vec{n}\right|=2$. Имеем: $\vec{m}\cdot\vec{n}=\left|\vec{m}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|$. Последнее означает, что $\cos\left(\vec{m},\vec{n}\right)=1$, т.е. векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ коллинеарны, а их координаты пропорциональны: $\frac{\sqrt{1-x}}{x}=\frac{\sqrt{3+x}}{1}$.

Полученное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases}\frac{1-x}{x^2}=\frac{3+x}{1},\\ 0<x<1.\end{cases}$$

Уравнение системы преобразуется к виду: $x^3+3x^2+x-1=0$, которое решается таким же образом, как и в способе I. С учетом неравенства системы получаем решение: $\sqrt{2}-1$.

6. Дан прямоугольный треугольник ABC, гипотенуза которого $AB=c$, а катеты $BC=a$, $CA=b$. R и r – соответственно его радиусы описанной и вписанной окружностей. Найдите наибольшее значение отношения $\frac{r}{R}$.

Ответ. $\sqrt{2}-1$.

Решение. Способ I. Используем известное соотношение для прямоугольного треугольника: $a+b-c=2r$. Поскольку $c=\sqrt{a^2+b^2}=2R$, то $a+b=2(R+r)$. Возведём это соотношение в квадрат:

$a^2+b^2+2ab=4(R+r)^2$, $4R^2+2ab=4(R+r)^2$, $2ab=4(R+r)^2-4R^2$.

Поскольку $2ab = 4S$, где S – площадь треугольника ABC, то

$$4S = 4(R + r)^2 - 4R^2 \text{ или } S = r(2R + r).$$

Перепишем последнее равенство в таком виде:

$$\frac{S}{R^2} = \frac{r}{R}\left(2 + \frac{r}{R}\right).$$

Теперь ясно, что задача свелась к нахождению максимального значения выражения $\frac{S}{R^2}$. Для прямоугольного треугольника справедлива формула $S = R^2\sin\alpha$, где α – угол между медианой, проведённой к гипотенузе, и этой гипотенузой. С учётом этой формулы: $\frac{S}{R^2} = \sin\alpha$. Синус принимает максимальное значение, равное 1, если $\alpha = 90°$, т.е. когда треугольник является равнобедренным. В этом случае

$$\frac{r}{R}\left(2 + \frac{r}{R}\right) = 1 \text{ или } \left(\frac{r}{R}\right)^2 + 2\left(\frac{r}{R}\right) - 1 = 0.$$

Последнее равенство можно преобразовать так:

$$\left(\frac{r}{R} + 1\right)^2 - 2 = 0,$$

откуда и следует, что наибольшее значение отношения $\frac{r}{R}$ есть $\sqrt{2} - 1$.

Способ II (Д.В. Прокопенко). Используя формулы для радиуса вписанной и описанной окружностей прямоугольного треугольника $r = \frac{a + b - c}{2}$ и $R = \frac{c}{2}$, получим:

$$\frac{r}{R} = \frac{a + b - c}{2 \cdot \frac{c}{2}} = \frac{a + b}{c} - 1, \text{ откуда } \frac{r}{R} + 1 = \frac{a + b}{c}.$$

Возведём в квадрат:

$$\left(\frac{r}{R} + 1\right)^2 = \frac{(a + b)^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} + \frac{2ab}{a^2 + b^2} = 1 + \frac{2ab}{a^2 + b^2}.$$

С помощью неравенства $a^2 + b^2 \ge 2ab$ получаем: $\left(\frac{r}{R} + 1\right)^2 \le 1 + 1 = 2$.

Следовательно, $\frac{r}{R} \le \sqrt{2} - 1$. Равенство достигается, только если $a^2 + b^2 = 2ab$, т.е. когда $a = b$.

Вернуться к содержанию

О восстановлении треугольника по пересечениям его чевиан с описанной окружностью

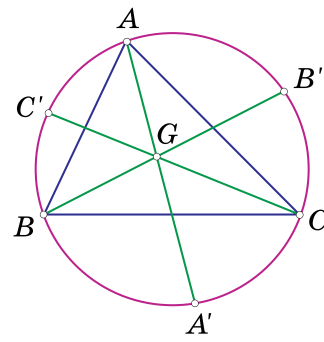


Алексей Геннадьевич МЯКИШЕВ
учитель математики Московского Химического Лицея
alex_geom@mtu-net.ru

Постановка задачи

В этой статье мы рассмотрим решение следующей задачи.

Постройте циркулем и линейкой треугольник ABC, зная три точки A', B', C', в которых его медианы[1] *пересекают описанную окружность.*

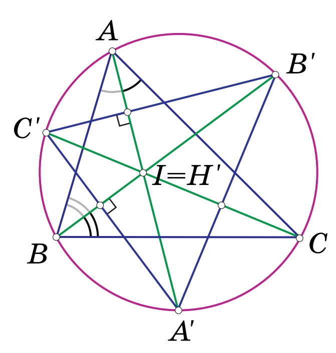


Немного истории

В своё время, году эдак в 1997-м, когда ещё только началось моё увлечение элементарной геометрией, в книжке [5] я наткнулся на задачу 8.29, показавшуюся довольно интересной. Вот её формулировка.

а) Постройте циркулем и линейкой треугольник ABC, зная три точки A', B', C', в которых биссектрисы его углов пересекают описанную окружность (оба треугольника остроугольные);

б) Постройте треугольник ABC, зная три точки A', B', C', в которых высоты треугольника пересекают описанную окружность (оба треугольника остроугольные).



Решение оказалось несложным, а ответ – любопытным. Как выяснилось, обе конструкции как бы дополняют друг друга: в первом случае следует провести высоты в треугольнике *A'B'C'* (до пересечения с описанной окружностью), а во втором – биссектрисы[2].

---

[1] Под *медианой* мы здесь понимаем прямую, проходящую через вершину треугольника и середину противоположной стороны. Аналогично далее в тексте под словом «*биссектриса*» или «*высота*» будем подразумевать соответствующую прямую. И вообще, *чевианой* данного треугольника для некоторой точки *P*, лежащей в его плоскости, назовем прямую, проходящую через вершину треугольника и точку *P*.

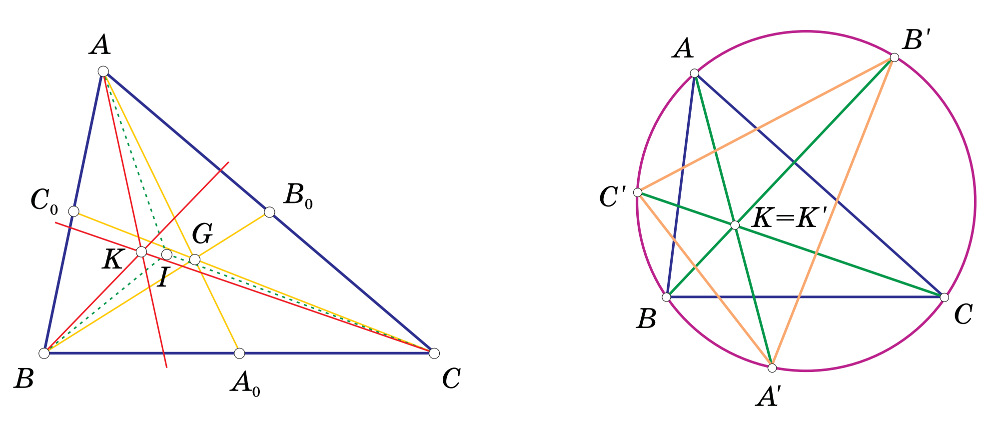
[2] Эта задача, ставшая своего рода классической, разбирается и в других хороших книжках, которые можно рекомендовать всем любителям геометрии. Например, см. также: [2, с. 208, задачи 43 и 45], [3, с. 83, задача 3.17].

Возник вопрос: что будет, если заменить ортоцентр или центр вписанной окружности какой-нибудь другой замечательной точкой? Например, самой простой – центром тяжести (точкой пересечения медиан). Сразу ответить на вопрос не удалось, и тогда я обратился за помощью к выдающемуся отечественному геометру И.Ф. Шарыгину (1937–2004), с которым имел счастье быть знакомым. Однако ответ оказался неизвестен и ему[3], что очень стимулировало мои последующие усилия решить-таки эту задачу. И когда эти усилия увенчались, наконец, успехом, это прибавило веры в себя и, что называется, сподвигло на дальнейшее изучение геометрии и сильно повлияло на весь ход моей жизни. Вот так иногда бывает!

Ключевая идея

Расскажу немного о том, какие соображения привели к решению задачи.

Всё в той же геометрической сокровищнице [5] обнаружился ещё и такой факт (задача 5.134): если в указанной конструкции в качестве исходной точки взять не центр тяжести, а более экзотическую точку – точку *Лемуана* K[4] (т.е. точку, изогонально сопряжённую точке пресечения медиан, или, иначе говоря, точку пересечения симедиан – прямых, симметричных медианам относительно биссектрис соответствующих углов), то, для того чтобы восстановить треугольник, необходимо в треугольнике $A'B'C'$ построить его точку Лемуана и провести через неё прямые из вершин до пересечения с описанной окружностью.



И вот, захотелось сильно разобраться: почему, во-первых, для некоторых замечательных точек всё получается быстро и хорошо, а для других – совсем напротив; а, во-вторых, как же всё-таки обстоит дело с центром тяжести?

Как оказалось, всё сводится к *педальному* треугольнику[5].

---

[3] Конечно, если бы Игорь Фёдорович только захотел, он с легкостью расколол бы этот орешек, ибо не было в элементарной геометрии для него ничего невозможного. Однако, обладая колоссальной интуицией, он, вероятно, чувствовал, что красивого геометрического решения здесь нет, и просто не захотел возиться.

[4] Почему в геометрии принято обозначать точку Лемуана буквой K, а не L, что, на первый взгляд, более естественно? Одна из версий такова, что к моменту открытия этой точки буква K оказалось первой по алфавиту незадействованной для тех или иных нужд элементарной геометрии.

[5] Если имеется какой-то треугольник, то педальным ему относительно некоторой точки P называют треугольник, образованный основаниями высот, опущенных на стороны (продолжения сторон) исходного треугольника из точки P. Желательно, правда, чтобы эта точка не лежала на описанной окружности; в этом случае, как хорошо известно, педальный треугольник вырождается в отрезок (См. [5, задача 5.85]).

В самом деле, рассмотрим факты.

Ортоцентр. Для точки пересечения высот педальным треугольником будет *ортотреугольник* (треугольник, образованный основаниями высот), причём, если исходный треугольник был остроугольным, то точка пересечения его высот становится точкой пересечения биссектрис педального треугольника, т.е. центром вписанной окружности ([5, задача 1.56]), а в противном случае ортоцентр переходит в центр вневписанной окружности. Заметим, что изогональное сопряжение (в педальном треугольнике) оставляет эти центры на месте. И, как уже знаем, именно через центр вписанной окружности треугольника $A'B'C'$ нужно провести прямые, чтобы решить задачу для ортоцентра остроугольного треугольника.

Центр вписанной (вневписанной) окружности. Точка пересечения внутренних биссектрис (то же и для двух внешних и одной внутренней) исходного треугольника превращается в центр описанной окружности её педального треугольника. Изогональное сопряжение переводит (см. [4]) центр описанной окружности в ортоцентр. И как раз ортоцентр треугольника $A'B'C'$ решает задачу в случае центра окружности, вписанной в исходный остроугольный треугольник.

Точка Лемуана. Точка Лемуана становится центром тяжести её педального треугольника (см. [5, задача 5.132]), а точка, изогонально сопряжённая центру тяжести, и есть точка Лемуана. Она же помогает восстановить треугольник, если его чевианы проводились через точку Лемуана.

Центр тяжести. Центр тяжести *не* является, по-видимому, никакой из известных нам замечательных точек для его педального треугольника.

Поэтому можем выдвинуть следующую гипотезу.

Рассмотрим треугольник ABC. Опишем вокруг него окружность и проведём через какую-нибудь известную нам замечательную точку P этого треугольника прямые из вершин до пересечения с окружностью. Отметим эти точки: A', B', C'. Необходимо по этим точкам восстановить исходный треугольник. Для этого рассмотрим треугольник $A_1B_1C_1$, педальный к треугольнику ABC относительно точки P. Если она будет также какой-нибудь замечательной и для педального треугольника (такие замечательные точки по справедливости бы следовало окрестить *отличными*), то нужно взять точку, изогонально сопряжённую ей, и построить её аналог в треугольнике $A'B'C'$, затем провести прямые, выходящие из его вершин, через эту точку – до пересечения с описанной окружностью. Получим вершины начального треугольника. Если же точка не является отличной, то, конечно, задача усложняется.

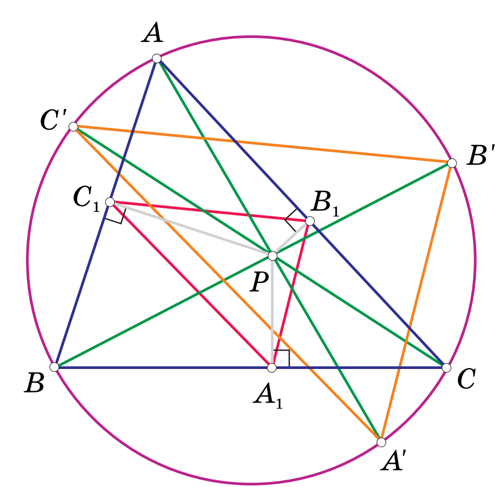
Ниже мы попробуем придать этому высказыванию более научный вид, а в завершение данного раздела приведем ещё один пример, подкрепляющий нашу гипотезу. Упущен самый простой случай, когда в роли замечательной точки выступает центр описанной окружности.

Центр описанной окружности. Здесь педальным треугольником будет серединный, и, очевидно, для него центр описанной окружности является ортоцентром, а изогонально сопряжённая к ортоцентру точка есть центр описанной окружности. Всё правильно!

Основные положения

Сейчас мы сформулируем и докажем три основных утверждения, формализующие содержание предыдущего раздела. (И будем при этом активно применять барицентрические координаты: все необходимые для понимания дальнейшего сведения о них можно прочитать в [1], [4]). Мы также воспользуемся ими в следующей, заключительной части нашей статьи.

Сначала сделаем рисунок (он годен для иллюстрации всех трёх лемм).



Здесь ABC – исходный треугольник, $A_1B_1C_1$ – ему педальный (относительно точки P), и $A'B'C'$ – треугольник, вершины которого являются пересечениями чевиан, проходящих через P, с описанной окружностью.

Лемма 1. Сторона $a_1 = B_1C_1$ педального треугольника вычисляется по формуле: $a_1 = \frac{a \cdot PA}{2R}$, где $a = BC$, R – радиус описанной окружности. (Справедливы и две аналогичные формулы для других сторон).

Доказательство. Заметим, что около четырёхугольника AC_1PB_1 можно описать окружность с диаметром PA. Тогда, применив теорему синусов к треугольнику AB_1C_1, получим: $a_1 = 2 \cdot \frac{PA}{2} \cdot \sin\angle A$. А из теоремы синусов для треугольника ABC следует, что $a = 2R \cdot \sin\angle A$. Остаётся из второго равенства выразить синус и подставить в первое.

Лемма 2. Пусть точка P имеет в базисе треугольника ABC барицентрические координаты $(x : y : z)$. Тогда она же в базисе педального треугольника (относительно её же самой), будет иметь следующие координаты: $P_{A_1B_1C_1} = \left(\frac{\sin^2\angle A}{x} : \frac{\sin^2\angle B}{y} : \frac{\sin^2\angle C}{z}\right)$. (Отсюда, в частности, следует, что точка Лемуана переходит в центр тяжести педального треугольника – поскольку квадраты синусов углов и есть её координаты в исходном треугольнике – см. [4].) Кроме того, точка, изогонально сопряженная ей относительно педального треугольника, будет иметь в базисе этого треугольника координаты $P_\iota = (AP^2 \cdot x : BP^2 \cdot y : CP^2 \cdot z)$.

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать точку P внутренней точкой всех трех треугольников (другими словами, рассмотрим случай, когда координаты положительны). Обозначим длины перпендикуляров, опущенных из точки P на стороны треугольника ABC, через h_a, h_b, h_c (где, например, h_a – перпендикуляр к BC и т.д.) и вспомним, что барицентрические координаты можно вычислять как площади соответствующих треугольников (см. [1], [4]). Поэтому можно считать (с точностью до умножения на некоторую ненулевую константу – барицентрические координаты обладают свойством однородности), что $x = ah_a$, $y = bh_b$, $z = ch_c$.

С другой стороны, вычисляя координаты точки P в базисе педального треугольника также как площади, но по формуле «половина произведения сторон на синус

угла между ними» (с учётом того, что $\sin\angle C_1PB_1 = \sin(\pi - \angle A) = \sin\angle A$ и т.д.), получим, что $x_1 = h_b h_c \sin\angle A$, $y_1 = h_a h_c \sin\angle B$, $z_1 = h_a h_b \sin\angle C$. Умножим и разделим первую координату на h_a, вторую – на h_b, третью – на h_c, а затем сократим все три на произведение расстояний. Получим, что $x_1 = \frac{\sin\angle A}{h_a}$, $y_1 = \frac{\sin\angle B}{h_b}$, $z_1 = \frac{\sin\angle C}{h_c}$. Заменим длины перпендикуляров на координаты точки в базисе ABC, и воспользуемся тем, что по теореме синусов (и однородности) длины сторон можно заменить синусами соответствующих углов. Первая формула доказана.

Вторая же немедленно следует из первой, леммы 1 и из того факта, что если в базисе некоторого треугольника точка имеет координаты $(x_1 : y_1 : z_1)$, то изогонально сопряженная к ней будет иметь координаты $\left(\frac{a_1^2}{x_1} : \frac{b_1^2}{y_1} : \frac{c_1^2}{z_1}\right)$, где в числителях стоят квадраты длин сторон базисного треугольника (см. [4]).

Лемма 3. Пусть точка P имеет в базисе педального треугольника координаты $(x_1 : y_1 : z_1)$, а изогонально сопряжённая ей относительно этого же треугольника P_l – $(x_2 : y_2 : z_2)$. Тогда в базисе треугольника $A'B'C'$ точка P будет иметь точно такие же координаты, как и P_l.

Доказательство. Заметим, что треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику $A'B'C'$. В самом деле, так как около четырёхугольника BC_1PA_1 можно описать окружность, то $\angle C_1A_1P = \angle ABB'$. Последний же опирается на одну дугу с углом $B'A'A$, следовательно, $\angle C_1A_1P = \angle B'A'A$.

Совершенно аналогично покажем, что $\angle B_1A_1P = \angle C'A'A$. Значит, $\angle A' = \angle A_1$ и т.д. Далее, пусть чевиана A_1P пересекает сторону B_1C_1 в какой-то точке X_2, а чевиана $A'P$ – сторону $B'C'$ в точке X'. Лемма будет доказана, если покажем, что $\frac{B'X'}{C'X'} = \frac{B_1X_2}{C_1X_2}$, ведь барицентрические координаты определяются (однозначно, с точностью до постоянного множителя) подобными отношениями. Но, дважды применив теорему синусов (к треугольнику $A'X'B'$ и к треугольнику $A'X'C'$), легко вывести, что $\frac{B'X'}{C'X'} = \frac{\sin\angle B'A'P}{\sin\angle C'A'P}\cdot\frac{c'}{b'}$. Точно также нетрудно получить, что $\frac{B_1X_2}{C_1X_2} = \frac{\sin\angle C_1A_1P}{\sin\angle B_1A_1P}\cdot\frac{c_1}{b_1}$ (ввиду изогонального сопряжения отношение синусов «переворачивается»). Отношения сторон, ввиду подобия треугольников, равны. Равны и отношения синусов, потому что углы будут соответственно равны друг другу.

Решение задачи в случае центра тяжести

Пусть теперь P – точка пересечения медиан. Требуется циркулем и линейкой попробовать восстановить исходный треугольник ABC, имея перед глазами лишь треугольник $A'B'C'$. Поскольку в начальном базисе $P = (1 : 1 : 1)$ и медианы делятся в отношении 2 : 1 считая от вершин, то лемма 3 говорит нам о том, что точка P в базисе $A'B'C'$ будет иметь координаты $(m_a^2 : m_b^2 : m_c^2)$, образованные квадратами длин медиан первоначального треугольника. Другими словами, нам нужно суметь разделить сторону $B'C'$ в отношении $m_b^2 : m_c^2$ и т.д., то есть построить циркулем и

линейкой отрезки, равные, с точностью до умножения на общий множитель, квадратам длин медиан, располагая только отрезками a', b', c' и R (стороны треугольника $A'B'C'$ и радиус описанной окружности). Пусть, как и прежде, a_1, b_1, c_1 – длины сторон педального, а a, b, c – исходного треугольника. Тогда лемма 1 даст нам систему из трёх уравнений. Выпишем первое из них:

$$a_1 = \frac{a \cdot \frac{2}{3} m_a}{2R}, \text{ откуда } 3Ra_1 = am_a, \text{ или же } a^2 m_a^2 = 9R^2 a_1^2.$$

Но педальный треугольник подобен треугольнику $A'B'C'$ (скажем, с коэффициентом подобия k, т.е. $ka_1 = a'$). Поэтому уравнение можно переписать в виде:

$$ka^2 \cdot km_a^2 = 9R^2 k^2 \cdot a_1^2 = 9R^2 \cdot a'^2.$$

Также можно написать ещё два аналогичных уравнения. Правые части всех трёх уравнений обозначим буквами p, q, r (причем будем считать, что $p \geq q \geq r$). В левых частях введём обозначения $ka^2 = x$, $kb^2 = y$, $kc^2 = z$. По известной формуле, выражающей длину медианы через стороны имеем:

$$km_a^2 = \frac{2y + 2z - x}{4} \text{ и т.д.}$$

В этих обозначениях получим (заменив $4p$ опять на p и т.д.) систему:

$$\begin{cases} x(2y+2z-x) = p, \\ y(2x+2z-y) = q, \\ z(2x+2y-z) = r, \end{cases} \quad \text{причём } p \geq q \geq r > 0, \ x, y, z > 0.$$

Оказывается, её можно решить, и, что интересно, построить эти решения циркулем и линейкой с точностью до умножения на константу. (Последнее утверждение, которое нужно доказать. После чего задача одолена).

Поступим следующим образом. Введём новую переменную $t = x + y + z$. Тогда система перепишется так:

$$\begin{cases} x(2t-3x) = p, \\ y(2t-3y) = q, \\ z(2t-3z) = r. \end{cases}$$

Каждое уравнение решим, как квадратное относительно соответствующего неизвестного. Например, первое перепишем как $3x^2 - 2tx + p = 0$, откуда

$$x = \frac{2t \pm 2\sqrt{t^2 - 3p}}{6} \text{ или } x = \frac{t}{3} \pm \frac{\sqrt{t^2 - 3p}}{3} \text{ и т.д.}$$

Но $x + y + z = t$, поэтому после сложения t уничтожаются (вот она, особенность данной системы), и получаем следующее уравнение (а точнее, 8 уравнений – если учитывать любые комбинации знаков):

$$\pm\sqrt{t^2 - 3p} \pm \sqrt{t^2 - 3q} \pm \sqrt{t^2 - 3r} = 0.$$

Подчеркнём, что сейчас мы не будем стремиться к полному анализу полученной системы, т.е. определять, сколько решений и при каких условиях будут иметь место. Ведь принципиально важно показать лишь, что любое из них строится циркулем и линейкой.

Всё же отсеем сразу очевидные побочные решения.

Начнём с самого тривиального случая: (+; +; +) или, что приводит к тому же, (−; −; −). Ясно, что здесь мгновенно получаем $p = q = r$ и $x=y=z=\frac{t}{3}$, $t=\sqrt{3p}=\sqrt{3q}=\sqrt{3r}$. Далее будем считать попросту, что $p > q > r$ (иные случаи ведут к равнобедренным треугольникам и к тому, что действительно подходят некоторые различные пары комбинаций, но они дают одинаковые решения).

Научимся теперь выбирать между парами комбинаций (+; −; −), (−; +; +), или (+; −; +), (−; +; −), или (+; +; −), (−; −; +). Например, первая пара ведёт к уравнению

$$\sqrt{t^2-3p}=\sqrt{t^2-3q}+\sqrt{t^2-3r}.$$

Отсюда следует, что $\sqrt{t^2-3p}\ge\sqrt{t^2-3r}$ или что $p\le r$. Однако $p > r$; противоречие. Также ведёт к противоречию ($r\ge q$) и вторая пара троек.

Последняя же, единственно возможная пара, приводит к уравнению:

$$\sqrt{t^2-3r}=\sqrt{t^2-3p}+\sqrt{t^2-3q}.$$

Последовательно и аккуратно возводя в квадрат, получим, как следствие, квадратное уравнение для определения $u = t^2$:

$$u^2-2u(p+q+r)+3\left(4pq-(p+q+r)^2\right)=0,$$

$$u=p+q+r\pm2\sqrt{p^2+q^2+r^2-pq-pr-rq}.$$

По виду решений легко теперь сообразить, что построение отрезков длиной в квадраты медиан (с точностью до умножения на константу) циркулем и линейкой провести можно. Мы не выйдем за рамки известных элементарных построений таких, как построение по заданным отрезкам a, b отрезков $\sqrt{ab}$, $\frac{ab}{c}$ и т.д. У нас нет, правда, единичного отрезка, но он и не нужен, поскольку квадраты медиан нужно строить с точностью до умножения на константу.

Таким образом, задача о восстановлении треугольника по пересечениям его медиан с описанной окружностью решена полностью.

Литература

1. *Балк М., Болтянский В.* Геометрия масс. — М.: Наука, 1987.

2. *Голубев В., Ерганжиева Л., Мосевич К.* Построение треугольника. — М.: Бином, 2008.

3. *Куланин Е., Федин С.* Геометрия треугольника в задачах. — М.: URSS, 2009.

4. *Мякишев А.* Элементы геометрии треугольника. — М.: МЦНМО, 2002.

5. *Прасолов В.* Задачи по планиметрии. Ч. 1. — М.: Наука, 1991.

◀ **Вернуться к содержанию**



Григорий Борисович ФИЛИППОВСКИЙ[1]
учитель математики Русановского лицея г. Киева
shvilka@mail.ru

Раз в год в апреле Русановским лицеем г. Киева традиционно проводится олимпиада среди учащихся 6–10-х классов. Для участия в ней приезжают ребята из школ Калининграда, Киева, Минска, Москвы, Николаева, Херсона, Черкасс, Чернигова. В этом году в олимпиаде приняло участие более 250 человек.

Особенность олимпиады состоит в том, что геометрических задач в ней предлагается не меньше, чем алгебраических (кроме 6 класса). Авторами ряда задач являются ученики или выпускники лицея. Одну задачу всегда предлагает И.А. Кушнир, ведущий мастер-классы в лицее.

В 6–7-х классах олимпиада проводилась устно (детям этого возраста легче защищать задачи устно, чем записывать). При решении каждой задачи учащийся имел две попытки. В 8-м классе олимпиада проводилась в письменной форме. В 9–10-х классах она была командной; в каждую команду входило 3 девятиклассника и 2 десятиклассника. Каждую задачу команды записывали на отдельном листке и сдавали жюри.

Ниже приводятся условия задач и решения.

Условия задач

6 класс

1. «Когда послезавтра станет вчера, – сказала девочка, – то сегодня будет столь же далеко от воскресенья, как и тот день, который был сегодня, когда позавчера было завтра». В какой день недели она произнесла этот головоломный лепет?

2. Первый путешественник был на 3 км впереди второго и шёл со скоростью 4 км/ч, второй – со скоростью 5 км/ч. Собака побежала со скоростью 15 км/ч от одного из них к другому, затем вернулась к первому. Так она бегала, пока они не встретились. Сколько километров пробежала собака?

3. Мальчик пошёл с отцом в тир. Отец купил ему 10 пулек. В дальнейшем отец за каждый промах у сына отбирал 1 пульку, а за каждое попадание давал 1 дополнительную пульку. Сын выстрелил 55 раз, после чего пульки у него кончились. Сколько раз он попал?

4. В выражении $\frac{1}{2}*\frac{2}{3}*\frac{3}{4}*\ldots*\frac{99}{100}$ замените 98 звёздочек знаками арифметических действий «–», «+», «×», «:» так, чтобы значение полученного выражения равнялось нулю.

5. (*Карлюченко А.В.*) Расположить 6 точек так, чтобы для любой из них было ровно 3 точки, удаленные от неё на расстояние, равное *a*.

[1] Все авторы указаны в конце статьи. – *Прим. ред.*

7 класс

1. В каждой клетке таблицы 3×3 записано число, причём произведение чисел в каждой строке и каждом столбце равно 1, а произведение чисел в каждом квадрате 2×2 равно 2. Найдите числа в таблице.

2. Дано три числа: x, $1-y$, $y-x$. Пусть S – наименьшее из этих чисел. Какое наибольшее значение может принимать S?

3. Мама поручила Пете купить на базаре 2 огурца, 3 помидора и 6 луковиц. Но Петя всё перепутал и купил 3 огурца, 6 помидоров и 2 луковицы, потратив на покупку ту же самую сумму денег. Расположите овощи в порядке возрастания стоимости, если известно, что огурцы стоят дороже, чем помидоры.

4. Постройте равнобедренный треугольник по основаниям трех его биссектрис.

5. (*Карлюченко О.А., Карлюченко А.В.*) В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) проведены трисектрисы острых углов: AN, AM, BK, BL (см. рис. 1). BK и AN пересекаются в точке T, AM и BL – в точке Q. Докажите, что $KT = TQ$.

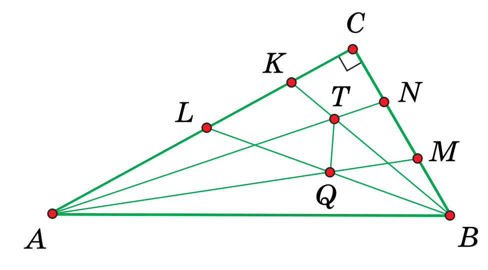


Рис. 1.

6. На окружности отмечены точки A и B, из которых проведены равные отрезки касательных AP и BQ так, что AB и PQ не параллельны. В каком отношении прямая AB делит отрезок PQ?

8 класс

1. Доказать, что уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет рациональных корней, если a, b, c – нечетные целые числа.

2. Для каждой пары чисел x, y обозначим через $s(x, y)$ наименьшее из чисел x, $1-y$, $y-x$. Какое наибольшее значение может принимать число $s(x, y)$?

3. (*Кулиш И.*) В таблице 9×9 две фишки стоят в соседних клетках, причём фишка первого игрока находится в угловой клетке. Двое игроков ходят по очереди. Ходить можно по горизонтали и по вертикали через клетку, а также по диагонали на одну клетку. Клетки, на которых стояли фишки, закрашиваются. По закрашенным клеткам ходить нельзя. Проигрывает тот, кому некуда ходить. Кто победит?

4. (*Кушнир И.А.*) В треугольнике ABC точка F – одна из точек пересечения вписанной окружности и биссектрисы угла BAC. Окружность касается сторон AB и AC в точках M и N соответственно. Доказать, что центр окружности, описанной около треугольника ANF, принадлежит окружности, описанной около треугольника AMN.

5. В окружности проведены две хорды AB и CD, которые пересекаются в точке M, причём $AM = MB$. На отрезке CD как на диаметре построена окружность. Точка E лежит на этой окружности, ME – перпендикуляр к CD. Найдите величину угла BEA.

6. (*Карлюченко А.В.*) Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с диаметром AD. O – точка пересечения диагоналей AC и BD. Окружность ω с центром в точке O касается стороны BC. Из вершин B и C провели касательные к окружности ω, которые пересеклись в точке T. Докажите, что точка T лежит на диаметре AD.

9–10 класс

1. Вершины правильного n-угольника пронумерованы числами 1, 2, ..., n (номера идут подряд по часовой стрелке или против часовой стрелки). Несколько таких n-угольников сложили в стопку так, что суммы номеров при каждой вершине оказались одинаковыми. Сколько n-угольников может быть в такой стопке?

2. Пусть $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$. Сколько существует пар (X, Y), $X\subseteq A, Y\subseteq A$ таких, что $X\cap Y=\varnothing$?

3. Найдите все натуральные n такие, что число n^4+4^n является простым.

4. (*Овсянников А.А.*) A и B – некоторые точки на параболе, C – точка пересечения касательных к параболе в точках A и B. По точкам A, B и C постройте ось симметрии параболы.

5. (*Карлюченко О.А., Карлюченко А.В.*) На сторонах AC и BC прямоугольного треугольника ABC ($\angle C=90°$) взяты точки P и Q так, что $\angle CAQ=\frac{1}{3}\angle A$, $\angle CBP=\frac{1}{3}\angle B$. Отрезки AQ и BP пересекаются в точке T. Докажите, что $TP=TQ$.

6. Дан треугольник ABC. На лучах BA и CA взяты точки A_1 и A_2 так, что $AA_1=AA_2=BC$. Аналогичным образом получены точки B_1 и B_2, C_1 и C_2. Докажите, что точки A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 принадлежат одной окружности (*окружности Конвея*). Найдите радиус этой окружности, если известны стороны треугольника ABC.

7. Докажите неравенство:

$$a^2+b^2+c^2\le 8R^2+2Rr,$$

где a, b, c – стороны произвольного треугольника, R – радиус его описанной окружности, r – радиус вписанной в этот треугольник окружности.

8. а) (*Сангаку*) В ранобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$) проведена высота AH. Окружность ω касается отрезков AH, BH и окружности, описанной около треугольника ABC. Докажите, что радиус окружности ω равен радиусу окружности, вписанной в треугольник ABC.

б) (*Сангаку*) В произвольном треугольнике ABC проведена высота AH. Окружность ω_1 касается отрезков AH, BH и окружности, описанной около треугольника ABC. Окружность ω_2 касается отрезков AH, CH и окружности, описанной около треугольника ABC. Докажите, что среднее арифметическое радиусов окружностей ω_1 и ω_2 равно радиусу окружности, вписанной в треугольник ABC.

Решения задач

6 класс

1. «Когда послезавтра станет вчера, – сказала девочка, – то сегодня будет столь же далеко от воскресенья, как и тот день, который был сегодня, когда позавчера было завтра». В какой день недели она произнесла этот головоломный лепет?

Ответ: в воскресенье.

Решение. День, когда послезавтра станет вчера, будет через три дня. День, когда позавчера было завтра, был три дня тому назад. Оба эти дня одинаково удалены от того дня, когда девочка произносила этот текст, а именно от *воскресенья*.

2. Первый путешественник был на 3 км впереди второго и шёл со скоростью 4 км/ч, второй – со скоростью 5 км/ч. Собака побежала со скоростью 15 км/ч от одного из них к другому, затем вернулась к первому. Так она бегала, пока они не встретились. Сколько километров пробежала собака?

Ответ: 45 км.

Решение.

1. 5 – 4 = 1 (км/ч) – скорость сближения путешественников.

2. 3 : 1 = 3 (ч) – время сближения путешественников.

3. 15 × 3 = 45 (км) – пробежала собака до встречи путешественников.

3. Мальчик пошёл с отцом в тир. Отец купил ему 10 пулек. В дальнейшем отец за каждый промах у сына отбирал 1 пульку, а за каждое попадание давал 1 дополнительную пульку. Сын выстрелил 55 раз, после чего пульки у него кончились. Сколько раз он попал?

Ответ: 50 раз.

Решение. Каждый раз, когда мальчик попадал в цель, число имеющихся у него пулек оставалось прежним (одну использовал и одну получал от отца). Каждый раз, когда мальчик промахивался, число имеющихся у него пулек уменьшалось на 2 (одну использовал и одну отбирал отец). Это значит, что сын за 55 выстрелов промахнулся 10 : 2 = 5 раз, стало быть, попал 55 – 5 = 50 раз.

4. В выражении $\frac{1}{2}*\frac{2}{3}*\frac{3}{4}*\ldots*\frac{99}{100}$ замените 98 звёздочек знаками арифметических действий «–», «+», «×», «:» так, чтобы значение полученного выражения равнялось нулю.

Решение. $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{9}{10}-\frac{10}{11}\cdot\frac{11}{12}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}=\frac{1}{10}-\frac{10}{100}=0.$

5. (*Карлюченко А.В.*) Расположить 6 точек так, чтобы для любой из них было ровно 3 точки, удаленные от неё на расстояние, равное *a*.

Ответ см. на рис. 2.

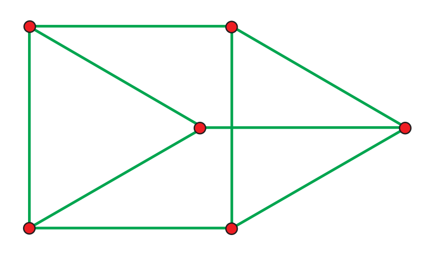


Рис. 2.

7 класс

1. В каждой клетке таблицы 3×3 записано число, причём произведение чисел в каждой строке и каждом столбце равно 1, а произведение чисел в каждом квадрате 2×2 равно 2. Найдите числа в таблице.

Ответ:

2	$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{4}$	16	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{4}$	2

Решение. Обозначим числа в таблице буквами a, b, c, d, e, f, g, h, i:

a	b	c
d	e	f
g	h	i

По условию $abc = 1$; $def = 1$. Тогда $abcdef = 1$. Но $abde = 2$, Поэтому $cf = \frac{1}{2}$. Следовательно, $i = 2$ (поскольку $cfi = 1$). Аналогично получим: $a = c = g = 2$. Тогда $b = d = f = h = \frac{1}{4}$. Таким образом, $e = 16$.

2. Дано три числа: x, $1 - y$, $y - x$. Пусть S – наименьшее из этих чисел. Какое наибольшее значение может принимать S?

Ответ: $\frac{1}{3}$.

Решение. Сумма трёх указанных в условии чисел равна 1. Поэтому наименьшее из них не больше $\frac{1}{3}$ – в противном случае сумма этих чисел была бы больше, чем $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$. С другой стороны, при $x=\frac{1}{3}$, $y=\frac{2}{3}$ наименьшее из трёх данных чисел как раз равно $\frac{1}{3}$.

3. Мама поручила Пете купить на базаре 2 огурца, 3 помидора и 6 луковиц. Но Петя все перепутал и купил 3 огурца, 6 помидоров и 2 луковицы, потратив на покупку ту же самую сумму денег. Расположите овощи в порядке возрастания стоимости, если известно, что огурцы стоят дороже, чем помидоры.

Ответ: помидор, луковица, огурец.

Решение. Допустим, что огурец стоит x руб., помидор y руб., а луковица z руб., при этом $x > y$. Тогда $2x + 3y + 6z = 3x + 6y + 2z$ или $4z = x + 3y$. Поскольку $x > y$, то с одной стороны $4z > 4y$, то есть $z > y$, а с другой – $4z < 4x$, то есть $z < x$. Окончательно имеем: $y < z < x$.

4. Постройте равнобедренный треугольник по основаниям трёх его биссектрис.

Решение. Пусть в треугольнике *ABC AB* = *AC*; *AL*, *BN*, *CT* — биссектрисы. Необходимо восстановить треугольник по точкам *L*, *N*, *T*. Проведём прямую *NT* и через точку *L* прямую *q* параллельно *NT* (см. рис. 3). Засечки из точек *T* и *N* раствором циркуля, равным *NT*, дадут вершины *B* и *C* (*BT* = *NT* из равенства углов *NBC*, *TBN* и *TNB*). Прямые *BT* и *CN* пересекаются в вершине *A*.

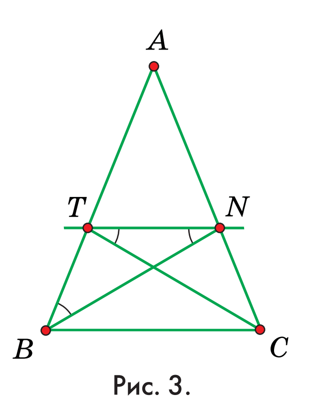


Рис. 3.

5. (*Карлюченко О.А., Карлюченко А.В.*) В прямоугольном треугольнике *ABC* ($\angle C = 90°$) проведены трисектрисы острых углов: *AN*, *AM*, *BK*, *BL* (см. рис. 4). *BK* и *AN* пересекаются в точке *T*, *AM* и *BL* — в точке *Q*. Докажите, что *KT* = *TQ*.

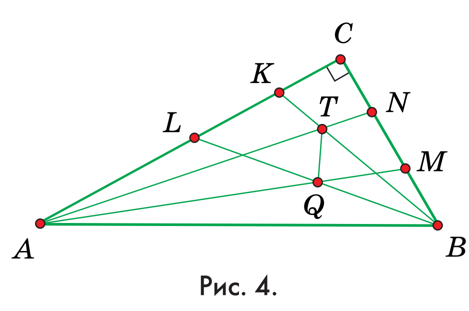


Рис. 4.

Решение. Пусть угол *A* равен 3α, а угол *B* равен $(90° - 3\alpha)$. Тогда угол *BKA* равен $180° - 2\alpha - 3(30° - \alpha) = 90° + \alpha$. Из треугольника *KTA* найдём угол *KTA*: $180° - (30° - \alpha) - (90° + \alpha) = 60°$. Тогда смежный с ним угол *ATB* равен 120°. Но *TQ* — биссектриса в треугольнике *ATB* (так как точка *Q* — инцентр этого треугольника). Следовательно, углы *ATQ* и *BTQ* равны по 60°. А значит, треугольники *KTA* и *QTA* равны по второму признаку равенства треугольников. Таким образом, *TK* = *TQ*.

6. На окружности отмечены точки *A* и *B*, из которых проведены равные отрезки касательных *AP* и *BQ* так, что *AB* и *PQ* не параллельны. В каком отношении прямая *AB* делит отрезок *PQ*?

Ответ: 1 : 1.

Решение.

Способ I. Пусть заданные отрезки касательных расположены так, как показано на рис. 5. Пусть *T* – точка пересечения прямых *AP* и *BQ*; *R* – точка, симметричная точке *P* относительно точки *A*. Получим, что *TA* = *TB* (отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки). Значит, *RT* = *RA* + *AT* = *PA* + *BT* = *QB* + *BT* = *QT*. Следовательно, треугольники *ATB* и *RTQ* – равнобедренные с общим углом при вершине, поэтому прямые *AB* и *RQ* параллельны. Так как *A* – середина отрезка *RP*, то (по теореме Фалеса) прямая *AB* пересекает отрезок *PQ* в его середине.

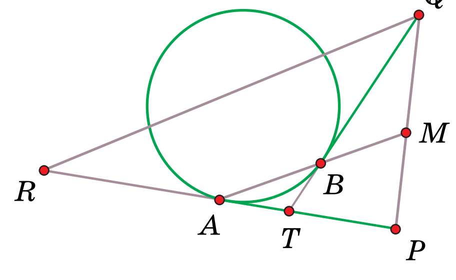


Рис. 5.

Способ II. Пусть прямая *AB* пересекает отрезок *PQ* в точке *M*, *O* – центр данной окружности. Тогда радиусы *OA* и *OB* перпендикулярны касательным *AP* и *BQ* соответственно (см. рис. 6). Прямоугольные треугольники *OAP* и *OBQ* равны (по двум катетам), следовательно,

$OP = OQ$ и $\angle AOP = \angle BOQ$. Тогда $\angle AOB = \angle POQ$, то есть в равнобедренных треугольниках AOB и POQ равны углы при вершинах. Следовательно, в этих треугольниках равны углы при основаниях. Из того, что $\angle OAB = \angle OPQ$, следует, что четырёхугольник $OAPM$ – вписанный. Тогда $\angle OAP + \angle OMP = 180°$, откуда $\angle OMP = 90°$. Таким образом, OM – высота равнобедренного треугольника POQ, проведённая к основанию, поэтому OM – медиана этого треугольника, то есть M – середина PQ.

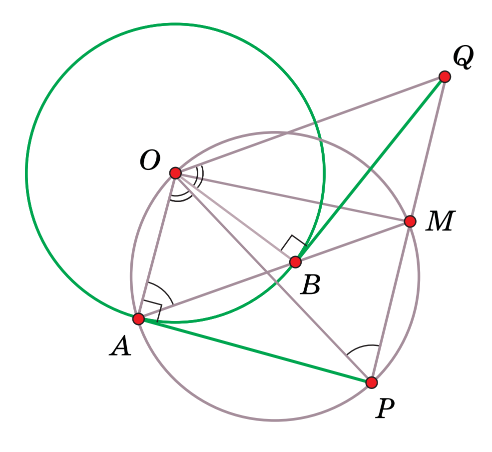


Рис. 6.

8 класс

1. Доказать, что уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет рациональных корней, если a, b, c — нечётные целые числа.

Решение. Допустим, что уравнение имеет рациональные корни. Тогда дискриминант $D = \sqrt{b^2 - 4ac}$ должен быть рациональным числом. То есть должно существовать целое число k, такое, что $k^2 = b^2 - 4ac$, или $4ac = (b - k)(b + k)$. Очевидно, что k – нечётное (нечётное минус чётное равно нечётное). Легко показать, что из чисел $(b - k)$ и $(b + k)$ одно делится на 2, а другое на 4. Таким образом, произведение $(b - k)(b + k)$ должно делиться на 8. Но $4ac$ делится только на 4 и не делится на 8. Пришли к противоречию. Таким образом, уравнение, заданное в условии, не может иметь рациональные корни.

2. Для каждой пары чисел x, y обозначим через $s(x, y)$ наименьшее из чисел x, $1 - y$, $y - x$. Какое наибольшее значение может принимать число $s(x, y)$?

См. решение задачи 2 для 7 класса.

3. (*Кулиш И.*) В таблице 9×9 две фишки стоят в соседних клетках, причём фишка первого игрока находится в угловой клетке. Двое игроков ходят по очереди. Ходить можно по горизонтали и по вертикали через клетку, а также по диагонали на одну клетку. Клетки, на которых стояли фишки, закрашиваются. По закрашенным клеткам ходить нельзя. Проигрывает тот, кому некуда ходить. Кто победит?

Решение. Раскрасим таблицу в шахматном порядке. Первоначальные клетки, на которых находятся игроки, после их первого хода считаются занятыми. При любом допустимом ходе первый игрок будет двигаться только по чёрным клеткам, а второй — по белым. Но в таблице 9×9 чёрных клеток на одну больше, чем белых. Поэтому при правильной игре выигрывает первый. Осталось только показать, что допустимыми по условию ходами первый сможет побывать на всех чёрных клетках. Это можно сделать, например, следующим образом: он будет двигаться вдоль строк на две клетки в сторону, а, достигнув конца строки, уголком переходить на следующую строку, побывав таким образом на всех чёрных клетках.

4. (*Кушнир И.А.*) В треугольнике ABC точка F – одна из точек пересечения вписанной окружности и биссектрисы угла BAC. Окружность касается сторон AB и AC в точках M и N соответственно. Доказать, что центр окружности, описанной около треугольника ANF, принадлежит окружности, описанной около треугольника AMN.

Решение. Рассмотрим два случая.

1. Точка F – первая точка пересечения биссектрисы угла A и вписанной окружности (см. рис. 7).

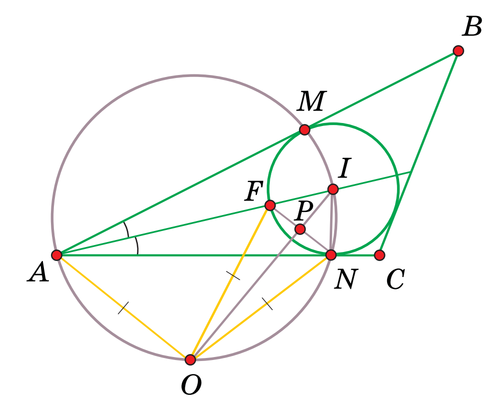


Рис. 7.

Проведем биссектрису угла AIN. Пусть она пересекает окружность, описанную около треугольника AMN, в точке O. Докажем, что точка O является центром окружности, описанной около треугольника AFN.

Поскольку IO – биссектриса угла AIN, опирающегося на дугу AN, то хорды AO и ON равны.

Обозначим точку пересечения луча IO с отрезком FN через P. Так как треугольник FIN равнобедренный, то IP – высота и медиана этого треугольника. Треугольники NPO и FPO прямоугольные и равны по двум катетам, поэтому $NO = FO$. Таким образом, $OA = OF = ON$, т.е. точка O, лежащая на окружности, равноудалена от вершин треугольника AFN.

2. Точка F – вторая точка пересечения биссектрисы угла A и вписанной окружности (см. рис. 8).

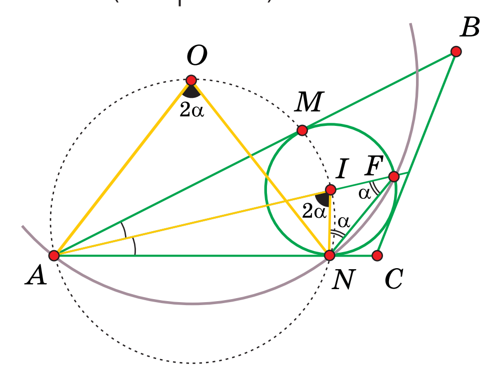


Рис. 8.

Пусть $\angle AFN = \alpha$. Тогда $\angle AIN = 2\alpha$ (внешний угол для равнобедренного треугольника FIN). Рассмотрим окружность с центром в точке O, описанную около треугольника AFN. Угол AFN, равный α, является вписанным; угол AON является центральным, поэтому $\angle AON = 2\alpha$. В то же время углы AIN и AON, равные каждый 2α, опираются на дугу AN окружности, описанной около треугольника AMN (как и раньше, описанная окружность проходит через точку I). Поскольку эта окружность является геометрическим местом точек, из которых отрезок AN виден под углом 2α, то точка O лежит на ней.

5. В окружности проведены две хорды AB и CD, которые пересекаются в точке M, причём $AM = MB$. На отрезке CD как на диаметре построена окружность. Точка E лежит на этой окружности, ME – перпендикуляр к CD. Найдите величину угла BEA.

Ответ: 90°.

Решение. Угол CED – прямой, так как он вписан в окружность и опирается на её диаметр (см. рис. 9). Из прямоугольного треугольника CED: $EM^2 = CM \cdot MD$. Кроме того,

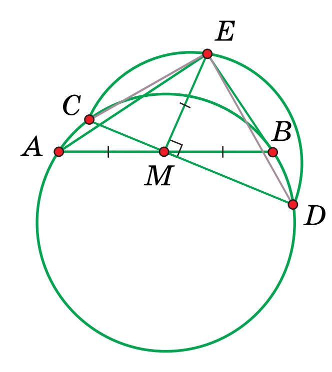


Рис. 9.

по свойству отрезков хорд $CM \cdot MD = AM \cdot MB = AM^2$. Следовательно, $EM = AM = MB$, то есть в треугольнике AEB медиана EM равна половине стороны AB. Значит, $\angle AEB = 90°$.

6. (*Карлюченко А.В.*) Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с диаметром AD. O – точка пересечения диагоналей AC и BD. Окружность ω с центром в точке O касается стороны BC. Из вершин B и C провели касательные к окружности ω, которые пересеклись в точке T. Докажите, что точка T лежит на диаметре AD.

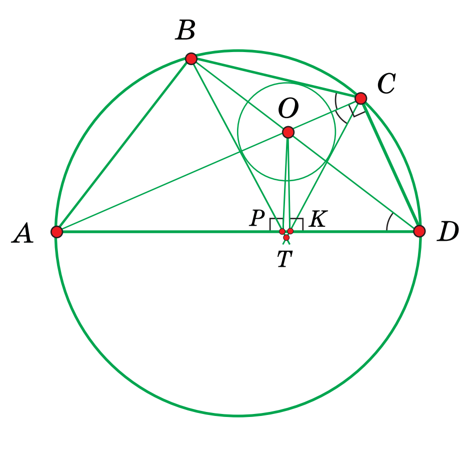


Рис. 10.

Решение. Пусть CT пересекает AD в точке K, BT пересекает AD в точке P (см. рис. 10). Углы BCA и BDA равны (опираются на дугу AB). Углы BCA и ACK равны (O – инцентр в треугольнике BCT). Получаем, что углы ACK и BDA равны, а значит, около четырёхугольника $OCDK$ можно описать окружность.

Но угол OCD прямой (опирается на диаметр AD). Значит, и угол OKD – прямой ($\angle OKD + \angle OCD = 180°$).

Аналогично показываем, что OP перпендикулярно AD.

В треугольнике OPK два прямых угла. Значит, точки P и K совпадают. Но тогда они совпадают ещё и с точкой T (треугольник PTK вырождается в точку). То есть точка T лежит на диаметре AD.

9–10 класс

1. Вершины правильного n-угольника пронумерованы числами 1, 2, ..., n (номера идут подряд по часовой стрелке или против часовой стрелки). Несколько таких n-угольников сложили в стопку так, что суммы номеров при каждой вершине оказались одинаковыми. Сколько n-угольников может быть в такой стопке?

Ответ: при $n = 2k$ — любое чётное число, при $n = 2k + 1$ — любое чётное число и любое число, большее или равное n.

Решение. Очевидно, что всегда можно сложить стопки такого вида:

1) стопка из двух многоугольников (2-стопка, см. рис. 11);

2) стопка из n-многоугольников (n-стопка). Действительно, каждый последующий многоугольник поворачивается на одну вершину относительно предыдущего. Сумма чисел при вершинах равна $1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$. Таким образом, всегда можно сложить стопку из $2t$ и nt n-угольников.

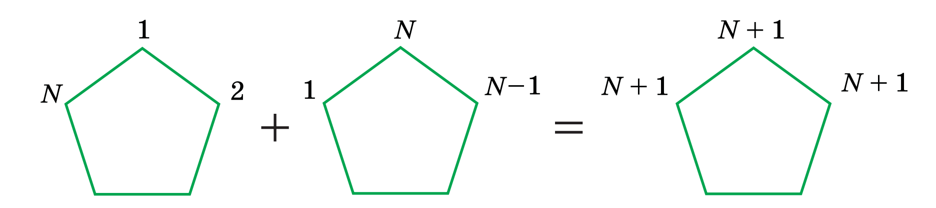


Рис. 11.

Рассмотрим два случая.

1) $n = 2k$. Покажем, что выложить стопку из нечётного количества многоугольников нельзя. Запишем на сторонах разности чисел при вершинах, взятые против часовой стрелки. У нас есть два типа многоугольников: $(+1, +1, ..., +1, -(n - 1))$ и $(-1, -1, ..., -1, +(n - 1))$. В первом случае вершины были занумерованы по часовой стрелке, во втором – против часовой стрелки. Как видно, на сторонах стоят нечётные числа. В стопке сумма чисел на сторонах должна быть нулевой. Однако сумма нечётного количества нечётных чисел не может быть нулевой, поэтому стопка из нечётного количества многоугольников невозможна.

2) $n = 2k + 1$. Мы по-прежнему можем выложить стопку из любого чётного количества многоугольников. Более того, для любого нечётного $m \geq n$ мы можем выложить стопку из m многоугольников: берём одну n-стопку и нужное количество 2-стопок. Покажем, что стопки длины m, где m — нечётное число и $m < n$, выложить нельзя.

Снова рассмотрим числа на сторонах. Число $(n - 1)$ — чётное, поэтому рассуждение из п. 1 не проходит. Однако, поскольку $m < n$, в стопке найдётся сторона, на которой записаны только $+1$ и -1. Сумма чисел на этой стороне не будет равна нулю.

2. Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Сколько существует пар $(X, Y), X \subseteq A, Y \subseteq A$ таких, что $X \cap Y = \varnothing$?

Ответ: 3^n.

Решение.

Способ I. Рассмотрим элемент a_i. У нас есть четыре варианта его расположения: никуда не входит, входит в X, входит в Y, входит в X и Y. Из этих вариантов нам не подходит только последний, а остальные три нам подходят. Поскольку все элементы множества A располагаются независимо, то ответ 3^n.

Способ II. Лемма: «У множества из m элементов существует 2^m подмножеств» (докажите самостоятельно).

Пусть $|X| = k$, тогда существует C_n^k вариантов выбора X. Если $Y \cap X = \varnothing$, значит $Y \subseteq A \setminus X$, то есть Y – это одно из 2^{n-k} подмножеств множества $A \setminus X$. Тогда всего вариантов выбора пары (X, Y): $\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot 2^{n-k}$. По биному Ньютона $\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot 2^{n-k} = (1+2)^n = 3^n$.

3. Найдите все натуральные n такие, что число $n^4 + 4^n$ является простым.

Ответ: $n = 1$.

Решение. Если $n = 2k$, то $n^4 + 4^n$ делится на 16, поэтому $n = 2k + 1$.

$$(2k+1)^4 + 4^{2k+1} = \left((2k+1)^2\right)^2 + \left(2^{2k+1}\right)^2 + 2\cdot(2k+1)^2\cdot 2^{2k+1} - 2\cdot(2k+1)^2\cdot 2^{2k+1} =$$

$$= \left((2k+1)^2 + 2^{2k+1}\right)^2 - \left((2k+1)\cdot 2^{k+1}\right)^2 =$$

$$= \left((2k+1)^2 + 2^{2k+1} - 2^{k+1}\cdot(2k+1)\right)\left((2k+1)^2 + 2^{2k+1} + 2^{k+1}\cdot(2k+1)\right)$$

Для того чтобы $n^4 + 4^n$ было простым, необходимо, чтобы первая скобка равнялась 1.

При $k = 0$ это требование выполняется, при $k = 1$ не выполняется.

При $k \geq 2$: $2^{2k+1} > 2^{k+1}(2k+1)$ (показывается методом математической индукции).
При $k = 0$ ($n = 1$) $n^4 + 4^n = 5$ — простое.
Следовательно, утверждение задачи справедливо только при $n = 1$.

4. (*Овсянников А.А.*) *A* и *B* — некоторые точки на параболе, *C* — точка пересечения касательных к параболе в точках *A* и *B*. По точкам *A*, *B* и *C* постройте ось симметрии параболы.

Решение. Проведём оси так, чтобы вершина параболы находилась в начале координат, а ось *Oy* совпадала с осью симметрии параболы (см. рис. 12). Уравнение параболы в такой системе координат выглядит так: $y = ax^2$. Уравнение касательной к параболе в точке $(x_0; y_0)$:

$$y_k = f'(x_0)(x - x_0) + y_0 = 2ax_0(x - x_0) + ax_0^2 = 2ax_0x - ax_0^2.$$

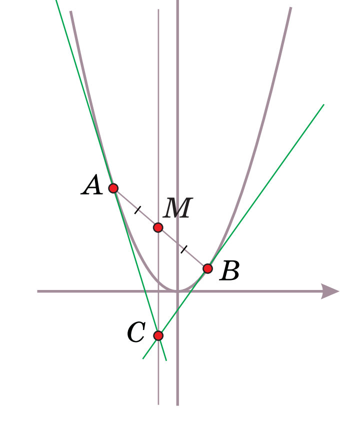


Рис. 12.

Рассматривая точку *C* как точку пересечения двух касательных, получаем:

$$2ax_ax_c - ax_a^2 = 2ax_bx_c - ax_b^2 \Rightarrow x_C = \frac{x_A + x_B}{2}.$$

Следовательно, прямая *CM*, где *M* — середина *AB*, параллельна оси *Oy*. Теперь достаточно найти одну точку на оси *Oy*, чтобы задача была решена: проведя из этой точки прямую, параллельную *CM*, мы получим ось *Oy*.

Способ I. Проведём прямые $AE \parallel BD \parallel Ox$ (см. рис. 13). Координаты точек *D* и *E*:

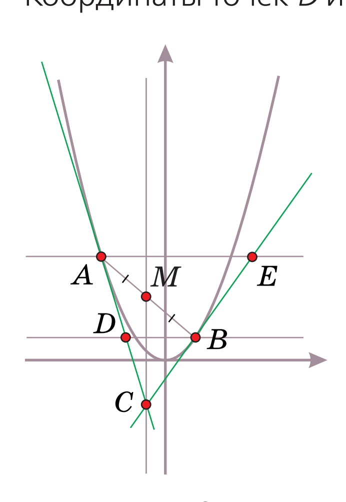


Рис. 13.

$$(x_d; y_d) = \left(\frac{x_b^2 + x_a^2}{2x_a}; y_b\right),$$

$$(x_e; y_e) = \left(\frac{x_b^2 + x_a^2}{2x_b}; y_a\right).$$

Докажем, что *AB* и *DE* пересекаются на оси *Oy*.

Уравнение прямой *AB*: $\frac{x - x_a}{x_b - x_a} = \frac{y - y_b}{y_b - y_a}$.

Координата $y^{(1)}$ пересечения прямой *AB* с *Oy*:

$$\frac{-x_a}{x_b - x_a} = \frac{y^{(1)} - ax_a^2}{a\left(x_b^2 - x_a^2\right)} \Rightarrow y^{(1)} = -ax_ax_b.$$

Уравнение прямой *DE*: $\frac{x - x_e}{x_d - x_e} = \frac{y - y_e}{y_d - y_e}$.

Координата $y^{(2)}$ пересечения *DE* с *Oy*:

$$\frac{-x_e}{x_d - x_e} = \frac{y^{(2)} - y_e}{y_d - y_e}, \qquad \frac{-\left(x_b^2 + x_a^2\right)}{2x_b\left(\frac{x_b^2 + x_a^2}{2x_a} - \frac{x_b^2 + x_a^2}{2x_b}\right)} = \frac{y^{(2)} - ax_a^2}{a\left(x_b^2 - x_a^2\right)}.$$

$$\frac{-x_a}{x_b - x_a} = \frac{y^{(2)} - ax_a^2}{a\left(x_b^2 - x_a^2\right)} \Rightarrow y^{(2)} = -ax_ax_b.$$

Следовательно, *AB* и *DE* пересекают *Oy* в одной точке.

Способ II (предложен участником олимпиады). Воспользуемся таким фактом: пучок параллельных оси *Oy* прямых, отраженных от параболы, пересекается в фокусе параболы — точке на оси симметрии. Доказательство оставляем читателям.

Поскольку *AC* и *BC* – касательные, мы легко можем построить отражения этих прямых от параболы в точках *A* и *B*. Проведём через точки *A* и *B* прямые l_1 и l_2, параллельные *CM*; пересечение отражений этих прямых лежит на оси *Oy* (см. рис. 14).

Заметим, что, помимо двух описанных, существуют и другие способы нахождения точки на *Oy*.

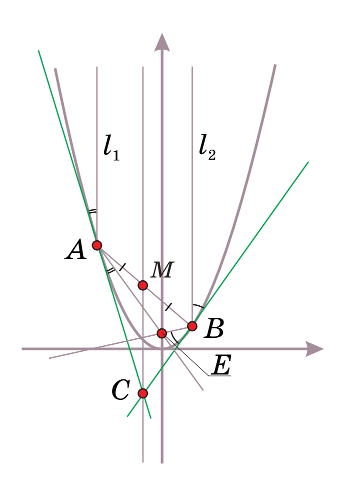


Рис. 14.

5. (*Карлюченко О.А., Карлюченко А.В.*) На сторонах *AC* и *BC* прямоугольного треугольника *ABC* ($\angle C = 90°$) взяты точки *P* и *Q* так, что $\angle CAQ = \frac{1}{3}\angle A$, $\angle CBP = \frac{1}{3}\angle B$. Отрезки *AQ* и *BP* пересекаются в точке *T*. Докажите, что *TP* = *TQ*.

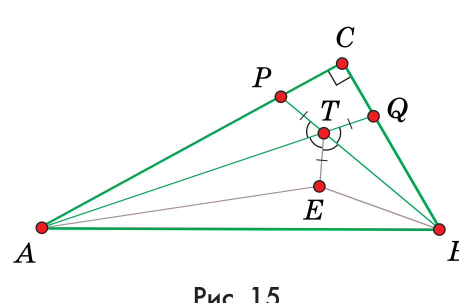


Рис. 15.

Решение. Поскольку $\angle TAB = \frac{2}{3}\angle A$, $\angle TBA = \frac{2}{3}\angle B$, то $\angle ATB = 180° - \frac{2}{3}(\angle A + \angle B) = 120°$; $\angle PTA = \angle QTB = 60°$ (см. рис. 15). Проведем вторые трисектрисы углов *A* и *B*, пусть они пересекаются в точке *E*. Тогда в треугольнике *ATB* отрезки *AE* и *BE* лежат на биссектрисах соответствующих углов. Следовательно, *TE* тоже лежит на биссектрисе и $\angle ATE = \angle ETB = 60°$.

Треугольники *APT* и *ATE* равны по стороне и двум углам. Следовательно, *PT* = *TE*. Аналогично показывается, что равны треугольники *BTE* и *BTQ*, откуда *PT* = *TQ* = *TE*.

6. Дан треугольник *ABC*. На лучах *BA* и *CA* взяты точки A_1 и A_2 так, что $AA_1 = AA_2 = BC$. Аналогичным образом получены точки B_1 и B_2, C_1 и C_2 (см. рис. 16). Докажите, что точки A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 принадлежат одной окружности (*окружности Конвея*). Найдите радиус этой окружности, если известны стороны треугольника *ABC*.

Ответ. $\sqrt{p^2 + r^2}$ (*p* – полупериметр треугольника *ABC*, *r* – радиус его вписанной окружности).

Решение. Рассмотрим отрезок A_1C_2. Его длина равна $a + b + c = 2p$. Пусть K_2 — середина A_1C_2, тогда $A_1K_2 = p$, $AK_2 = p - a$, следовательно, K_2 — точка касания окружности, вписанной в треугольник *ABC*. Аналогично показывается, что сере-

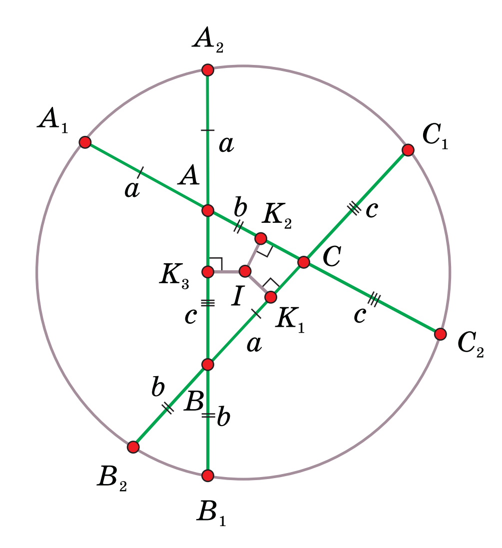


Рис. 16.

динами отрезков A_2B_1 и B_2C_1 являются другие точки касания K_3 и K_1. Значит, если точки A_1; A_2; B_1; B_2; C_1; C_2 лежат на одной окружности, то её центром может быть только точка I – центр вписанной в треугольник ABC окружности.

Рассмотрим отрезок IA_1. Его длина (по теореме Пифагора) равна $\sqrt{p^2+r^2}$. Аналогично остальные пять расстояний равны $\sqrt{p^2+r^2}$, то есть точка I равноудалена от всех этих шести точек. Таким образом, все указанные точки лежат на окружности с центром в точке I и радиуса $\sqrt{p^2+r^2}$.

У этой задачи существуют и другие решения; главное – не ошибиться. Например, легко показать, что точки A_1, A_2, B_1, C_2 лежат на одной окружности (поскольку $AA_1 \cdot AC_2 = AA_2 \cdot AB_1 = a\cdot(b+c)$). Так же показывается, что точки B_1, B_2, C_1, A_2 лежат на одной окружности, и точки C_1, C_2, A_1, B_2 лежат на одной окружности. Однако совершенно не очевидно, что эти три окружности совпадают.

7. Докажите неравенство: $a^2+b^2+c^2 \le 8R^2+2Rr$, где a, b, c – стороны произвольного треугольника, R – радиус его описанной окружности, r – радиус вписанной в этот треугольник окружности.

Решение.

Способ I. Поскольку $OH^2 = 9R^2 - \left(a^2+b^2+c^2\right)$, а $OI^2 = R^2 - 2Rr$, где O – центр описанной окружности, I – инцентр, H – ортоцентр, то неравенство эквивалентно такому: $OH^2 \ge OI^2$, или же $OH \ge OI$. Для тупоугольного треугольника данное утверждение очевидно: поскольку точка I лежит внутри треугольника, а точка H вне его, то $OI < OH$.

Рассмотрим остроугольный треугольник. Поскольку биссектриса угла A является биссектрисой угла OAH, то точка I лежит внутри угла OAH (см. рис. 17). По аналогичным причинам она лежит внутри углов OBH и OCH, то есть I лежит внутри четырёхугольника $OEHF$.

Далее, $\angle OAB = 90° - \angle C$, $\angle HBA = 90° - \angle A$. Следовательно, $\angle OEH = \angle A + \angle C > 90°$. Аналогично $\angle OFH = \angle B + \angle C > 90°$.

Рис. 17.

Поскольку углы OEH и OFH – тупые, то четырёхугольник $OEHF$ полностью лежит внутри окружности, построенной на OH как на диаметре. OI – отрезок внутри этой окружности, следовательно, $OI < OH$.

Способ II (предложен участником олимпиады). Известна формула: $IH^2 = 4R^2 + 2r^2 - \dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}$ (докажите самостоятельно). Поскольку $IH^2 > 0$, то $a^2+b^2+c^2 \le 8R^2+4r^2$, что является более сильным неравенством, чем то, которое предложено в условии.

8. а) (*Сангаку*) В ранобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$) проведена высота AH. Окружность ω касается отрезков AH, BH и окружности, описанной около треугольника ABC. Докажите, что радиус окружности ω равен радиусу окружности, вписанной в треугольник ABC.

б) (*Сангаку*) В произвольном треугольнике *ABC* проведена высота *AH*. Окружность ω_1 касается отрезков *AH*, *BH* и окружности, описанной около треугольника *ABC*. Окружность ω_2 касается отрезков *AH*, *CH* и окружности, описанной около треугольника *ABC*. Докажите, что среднее арифметическое радиусов окружностей ω_1 и ω_2 равно радиусу окружности, вписанной в треугольник *ABC*.

Решение. а) На перпендикуляре к *AH*, восстановленном из точки *I*, возьмём точку *Q* такую, что $IQ = r$ (r — радиус вписанной в треугольник *ABC* окружности, см. рис. 18). Тогда по теореме Пифагора имеем: $OQ^2 = OI^2 + IQ^2 = R^2 - 2Rr + r^2 = (R-r)^2$, то есть $OQ = R - r$. Следовательно, если провести окружность с центром в *Q* радиуса *r*, то она будет касаться отрезков *AH*, *HC* и описанной окружности треугольника *ABC*, так как расстояние между центрами равно разности радиусов. Легко показать, что других окружностей, удовлетворяющих условию (таких, что касаются *AH*, *HC* и описанной окружности), не существует.

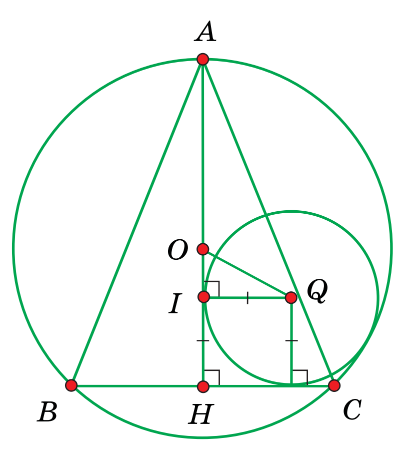


Рис. 18.

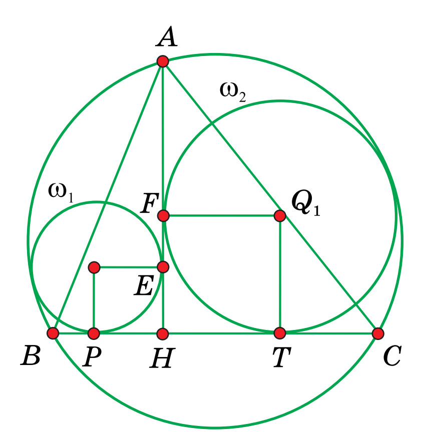


Рис. 19.

б) Применим теорему Кэзи для точек *A*, *C*, *B* и окружности ω_1 (см. рис. 19):

$CP \cdot AB = BP \cdot AC + AE \cdot BC$ или

$$CP \cdot c = BP \cdot b + (h_a - r_1) \cdot a.$$

По теореме Кэзи для точек *A*, *C*, *B* и окружности ω_2 имеем:

$BT \cdot AC = CT \cdot AB + AF \cdot BC$ или

$$BT \cdot b = CT \cdot c + (h_a - r_2) \cdot a.$$

Сложим полученные равенства:

$$b(BT - BP) + c(CP - CT) = a(2h_a - r_1 - r_2).$$

Поскольку $BT - BP = CP - CT = r_2 + r_1$, то имеем:

$(r_2 + r_1) \cdot (a + b + c) = 2a \cdot h_a$, $(r_2 + r_1) \cdot 2p = 4S$ и $r_2 + r_1 = 2r$.

Нам не удалось найти решение этой задачи без использования теоремы Кэзи. Мы были бы признательны тому, кто сможет это сделать.

Авторы статьи: *А.В. Карлюченко, И.В. Михайлик, Г.Б. Филипповский, Л.А. Харченко, А.А. Шамович, С.В. Яковлев.*

Вернуться к содержанию



Размышления

Математические определения и преподавание[1]



Жюль Анри ПУАНКАРЕ (1854–1912)
французский математик и астроном

1. Что разумеют под хорошим определением? Для философа или для учёного это есть определение, которое приложимо ко всем определяемым предметам и только к ним; такое определение удовлетворяет правилам логики. Но при преподавании дело обстоит иначе. Здесь хорошим определением будет то, которое понято учениками.

Чем объяснить, что многие умы отказываются понимать математику? Не парадоксально ли это? В самом деле, вот наука, которая апеллирует только к основным принципам логики, например к принципу противоречия, апеллирует к тому, что составляет, так сказать, скелет нашего разумения, к тому, от чего нельзя отказаться, не отказываясь вместе с тем от самого мышления, и всё же встречаются люди, которые находят эту науку тёмной! И этих людей большинство! Пусть бы они оказались неспособными изобретать — это ещё допустимо. Но они не понимают доказательств, которые им предлагают, они остаются слепыми, когда им подносят свет, который для нас горит чистым и ярким пламенем, — вот что чрезвычайно странно.

А между тем достаточно и небольшого опыта, доставляемого экзаменами, чтобы убедиться в том, что эти слепые отнюдь не являются исключениями. Здесь

[1] Текст перепечатан из книги: *Пуанкаре А.* О науке. М., 1983. С. 352–362.

имеется проблема, которая не легко решается, но которая должна занимать всех, желающих посвятить себя делу преподавания.

Что значит понимать? Имеет ли это слово для всех одно и то же значение? Понять доказательство теоремы — значит ли это рассмотреть последовательно каждый из силлогизмов, из коих составляется доказательство, и констатировать, что он правилен и согласуется с ходом задачи? Точно так же понять определение — значит ли это только признать, что смысл всех употребленных в нём терминов уже известен, и констатировать, что определение не заключает в себе никакого противоречия?

«Да», — скажут одни, которые, констатировав отсутствие противоречия в определении, говорят: «Мы его поняли». «Нет», — скажет большинство. Почти все люди оказываются более требовательными; они хотят не только знать, правильны ли все силлогизмы доказательства, но ещё и знать, почему силлогизмы связываются в данном, а не в другом порядке. Пока им кажется, что эта связь рождена капризом, а не разумом в постоянном сознании преследуемой цели, они думают, что не поняли доказательства.

Без сомнения, они сами не отдают себе отчёта в том, чего они собственно требуют, и не могут формулировать своего желания; но если они не находят удовлетворения, то они смутно чувствуют, что чего-то им недостает. Что же тогда происходит? Вначале они ещё схватывают те очевидные вещи, которые представляются их взору; но, так как последние связаны чрезвычайно тонкой нитью с предшествующими и последующими, то они не оставляют никакого следа в их мозгу; они тотчас забываются. Освещённые на одно мгновение, они сейчас же исчезают в сумраке вечной ночи. А когда эти люди следят за дальнейшим развитием доказательства, для них исчезает и прежняя эфемерная ясность, так как теоремы опираются одна на другую, а теоремы, которые им нужны, уже забыты. Таким образом, эти люди становятся неспособными понимать математику.

Не всегда здесь виной преподаватель; зачастую ум людей, нуждающийся в руководящей нити, слишком ленив для поисков её. Но, чтобы помочь непонимающим, мы должны сначала хорошо узнать то, что их останавливает.

Другие же спросят, для чего всё это служит; они не поймут силлогизмов, если они не нашли вокруг себя на практике или в природе основания для того или иного математического понятия. Под всяким словом они хотят разглядеть чувственный образ; необходимо, чтобы определение вызывало этот образ, чтобы на каждой стадии доказательства они видели его превращения и эволюцию. Лишь при таком условии они поймут и удержат в памяти доказательство. Такие люди часто заблуждаются относительно самих себя; они не слушают рассуждений, а рассматривают фигуры, они воображают, что поняли, тогда как они только видели.

2. Сколько различных тенденций! Нужно ли с ними бороться? Или нужно ими воспользоваться? А если мы хотим с ними бороться, то какой из них должны мы благоприятствовать? Нужно ли доказывать тем, которые довольствуются чистой логикой, что они видят только одну сторону вещей? Или, напротив, нужно доказывать тем, которые не удовлетворяются так легко, что то, чего они требуют, не является необходимостью?

Другими словами, должны ли мы принуждать молодых людей к тому, чтобы они изменяли природу своего ума? Такая попытка была бы бесплодна. Мы не обладаем философским камнем, который дал бы нам возможность превращать один в другой вверенные нам металлы; всё, что мы можем сделать, — это работать, приспосабливаясь к их свойствам.

Многие дети неспособны стать математиками, тем не менее им необходимо преподавать математику. Да и сами математики не все отлиты по одной и той же модели. Достаточно прочитать их труды, чтобы заметить существование умов двух типов: логиков, как Вейерштрасс, и интуитивистов, как Риман. Такая же разница наблюдается и среди студентов. Одни любят разрабатывать задачи, как они выражаются, «путём анализа», другие — «путём геометрии».

Было бы бесполезно пытаться изменить что-либо в этом отношении, да и, помимо того, было ли бы это желательно?

Хорошо, что существуют логики и интуитивисты; кто рискнёт утверждать, что он предпочел бы, чтобы Вейерштрасс никогда не писал или чтобы Римана не было? Таким образом, мы должны примириться с разнообразием умов или, ещё лучше, мы должны ему радоваться.

3. Так как слово «понимать» имеет несколько значений, то определения, наиболее понятные для одних людей, не будут совпадать с определениями, которые подходят для других. Мы имеем такие определения, которые стараются вызвать в нас образ, и такие, которые лишь комбинируют пустые формы, доступные интеллекту, но только ему одному; определения, которые по своей абстрактности лишены всякого материального содержания.

Я не знаю, нужно ли приводить примеры. Однако мы приведём некоторые, и прежде всего мы остановимся на определении дробей, которое даст нам крайний пример. В начальных школах, чтобы определить дробь, разрезают яблоко или пирог; конечно, разрезание происходит в уме, а не в действительности, ибо я не думаю, чтобы бюджет начальной школы позволял такую расточительность. В высшей нормальной школе или на факультетах, напротив, скажут: дробь — это совокупность двух целых чисел, разделенных горизонтальной чертой; определят при помощи соглашений те операции, которым можно подвергать эти символы; докажут, что правила для этих операций те же, какие употребляются в исчислении целых чисел и, наконец, обнаружат, что, умножая, согласно этим правилам, дробь на знаменатель, мы находим числитель. Такое определение будет здесь уместным, потому что его преподносят молодым людям, которые уже давно освоились с понятием о дробях — они уже делили яблоки и другие предметы; ум которых уже изощрён математической эрудицией; которые хотят, наконец, получить чисто логическое определение. Но как был бы ошеломлён начинающий, к которому подошли бы с подобным определением.

Таковы же определения, которые вы найдёте в удивительной и несколько раз премированной книге Гильберта «Основания геометрии». Посмотрим, как он начинает: вообразим три системы вещей, которые мы назовём точками, прямыми и плоскостями. Что это за «вещи» — мы не знаем, да и незачем нам это знать. Было бы даже греховно стараться это узнать. Всё, на что мы можем претендовать, сводится

к тому, чтобы мы усвоили относящиеся к ним аксиомы, например следующую: две различные точки всегда определяют прямую, и комментарий к ней: вместо «определяют» мы можем сказать, что прямая проходит через две точки, или соединяет эти две точки, или что две точки расположены на прямой. Значит, фраза «точки расположены на прямой» является просто синонимом фразы «точки определяют прямую». Вот книга, которую я очень высоко ценю, но которую я не рекомендую лицеисту. Впрочем, я мог бы это сделать без опаски, так как в чтении её он ушел бы не очень далеко.

Я взял крайние примеры; никакой преподаватель, конечно, не предложил бы таких определений. Но разве не остаётся такая же опасность и тогда, когда мы стоим ближе к действительности?

Вот в четвёртом классе. Преподаватель диктует: «Окружность — это геометрическое место точек на плоскости, находящихся на одном и том же расстоянии от одной внутренней точки, именуемой центром». Хороший ученик вписывает эту фразу в свою тетрадь; плохой ученик рисует в ней «человечков», но ни тот, ни другой ничего не поняли. Тогда преподаватель берёт мел и рисует круг на доске. «Ага, — думают ученики, — почему он не сказал сразу: окружность — это кружок, и мы бы сразу поняли». Без сомнения, преподаватель прав. Определение учеников не имело бы никакой ценности, потому что не могло бы служить ни для какого доказательства, и в особенности не привило бы им спасительной привычки анализировать свои понятия. Но им надобно было бы доказать, что они не понимают того, что им кажется понятным, надобно было бы заставить их отдать себе отчет в грубости их первоначального представления, сделать так, чтобы они сами пожелали очистить и улучшить это представление.

4. Я ещё вернусь ко всем этим примерам. Я хотел лишь показать вам две противоположные идеи: между ними имеется самый резкий контраст, причина которого нам раскрывается историей науки. Если мы читаем книгу, написанную пятьдесят лет назад, то рассуждения, которые мы в ней находим, кажутся нам большей частью лишенными логической строгости.

В ту эпоху допускали, что непрерывная функция не может изменить знак, не проходя через нуль; теперь это доказывают. Допускали, что обыкновенные правила счисления приложимы к несоизмеримым числам, теперь это доказывают. Допускали ещё и другие вещи, которые порою оказывались ложными.

Доверялись интуиции. Но интуиция не может дать ни строгости суждений, ни уверенности в их правильности, в этом убеждались всё более и более. Интуиция, например, учит нас, что всякая кривая имеет касательную, т.е. что каждая непрерывная функция имеет производную, и, однако, это положение ложно. А так как знание стремилось к уверенности, то приходилось всё более и более ограничивать роль интуиции. Каким образом свершилась эта необходимая эволюция? Вскоре было замечено, что рассуждения лишь тогда приобретут строго доказательную силу, когда эта строгость будет предварительно внесена в определения.

Объекты, которыми занимаются математики, долгое время не имели хороших определений; эти предметы казались известными потому, что их себе представляли при помощи чувств или воображения; но в действительности их образы отличались

грубостью; не было точных идей, на которые могли бы опереться доказательства. Вот в эту сторону логики вынуждены были направить свои усилия. Примером могут служить несоизмеримые числа.

Неопределённая идея непрерывности, которой мы обязаны интуиции, разрешилась в сложную систему неравенств, имеющих дело с целыми числами. Благодаря этому исчезли, наконец, все те трудности, которые пугали наших отцов, когда они размышляли об основаниях исчисления бесконечно малых величин.

Теперь анализ имеет дело только с целыми числами или же с конечными или бесконечными системами целых чисел, связанных совокупностью равенств и неравенств.

Математические науки, как говорят, арифметизировались.

5. Но можно ли думать, что эти науки достигли абсолютной строгости, ничем со своей стороны не жертвуя? Ничуть; то, что они выиграли в строгости, они потеряли в объективности. Они приобретали совершенную чистоту, удаляясь от реальности. Теперь можно свободно обозреть всю область математического знания, которая раньше была усеяна преградами, но эти преграды не исчезли. Они были лишь перенесены на границу; и если мы хотим перейти эту границу, чтобы вступить в область практики, то мы должны снова преодолеть эти препятствия.

Прежде мы обладали лишь неясными понятиями, составленными из несвязанных элементов, из которых одни были априорны, другие вытекали из более или менее уяснённого опыта; мы думали, что главные их свойства узнаны интуитивным путём. Теперь эмпирические элементы отвергаются и сохраняются лишь элементы априорные, для определения берётся одно из свойств, все другие выводятся из него путём строгого рассуждения. Это хорошо, но остаётся ещё доказать, что свойство, ставшее определением, принадлежит действительно тем реальным объектам, с которыми нас познакомил опыт и из которых мы вывели наше ясное интуитивное понятие. Чтобы это доказать, необходимо обратиться к опыту или прибегнуть к усилию интуиции; если же мы этого не докажем, то наши теоремы будут совершенно строгими, но и совершенно бесполезными.

Логика приводит часто к уродствам. На протяжении полувека мы видели, как возникло множество причудливых функций; эти новые функции как будто старались возможно менее походить на те благородные функции, которые чему-нибудь да служат. Таковы, например, функции непрерывные, но без производных, и т.д. Более того, с точки зрения логической эти именно причудливые функции и являются наиболее общими; те же функции, которые мы находим без долгих поисков, образуют как бы частный случай. Для них остаётся лишь маленький уголок. Некогда при нахождении новых функций имелась в виду какая-нибудь практическая цель. Теперь функции изобретаются специально для того, чтобы обнаружить недостаточность рассуждения наших отцов, никакого иного вывода, кроме этого, из них нельзя извлечь.

Если бы логика была единственным руководителем педагога, то нужно было бы начинать с наиболее общих, т.е. наиболее причудливых функций. Именно, начинающего следовало бы в таком случае отдать во власть этого музея уродств. «Если вы этого не делаете, — могли бы сказать логики, — то вы достигнете надлежащей строгости лишь после целого ряда этапов».

6. Быть может, это и так; но мы не можем не дорожить реальностью. Я разумею здесь не только реальность чувственного мира, который, впрочем, имеет свою ценность уже потому, что девять десятых ваших учеников ищут у вас орудий именно для борьбы с этой реальностью. Но есть реальность более утончённая, которая составляет жизнь математических субстанций и которая всё-таки не логика.

Наше тело составлено из клеток, клетки — из атомов. Составляют ли эти клетки и эти атомы всё, что есть реального в человеческом теле? Не представляет ли собою способ, каким эти клетки собраны и который обусловливает единство индивида, также реальности и реальности гораздо более интересной? Мог бы натуралист, изучавший слона только под микроскопом, думать, что он достаточно познакомился с этим животным?

То же самое в области математики. Когда логик разложил всякое доказательство на множество элементарных операций, вполне правильных, он еще не уловил реальности в её целом; то неизвестное мне, что составляет единство доказательства, совершенно от него ускользнуло.

Стоит ли в здании, возведённом нашими учителями, удивляться работе каменщика, если мы не понимаем плана архитектора? Но общий взгляд не даётся нам чистой логикой; чтобы получить его, мы должны обратиться к интуиции.

Возьмём для примера идею непрерывной функции. Сначала это не что иное, как чувственный образ, след, начертанный мелом на чёрной доске. Мало-помалу эта идея очищается. Ею пользуются для построения сложной системы неравенств, воспроизводящей все линии примитивного образа. Когда построение закончено, кружала[2] снимаются, как это делается после сооружения свода, то грубое представление, которое стало отныне бесполезным, исчезает, остаётся лишь само здание, безупречное в глазах логика. И, однако, если бы преподаватель не влил содержания в первоначальные образы, если бы он не установил на время кружал, разве мог бы ученик догадаться, по какому капризу все эти неравенства определенным образом нанизывались одно на другое? Определение было бы правильным с логической стороны, но оно не раскрыло бы ученику настоящей реальности.

7. Мы должны вернуться назад. Без сомнения, учителю неприятно вести преподавание в рамках, которые его не вполне удовлетворяют. Но удовлетворение учителя — не единственная цель обучения; нужно прежде всего считаться с умом ученика и с тем, что из него желают сделать.

Зоологи утверждают, что эмбриональное развитие животного резюмирует вкратце историю его предков в разные геологические периоды. Воспитатель должен заставить ребёнка пройти через те ступени, которые были пройдены его предками, пройти быстрее, но без пропуска промежуточных этапов. В этом смысле история науки должна быть нашим первым руководителем.

Наши предки думали, что знают, что такое дробь, непрерывность, площадь кривой поверхности; лишь мы заметили, что они этого не знали. Точно так же наши ученики думают, что они это знают, когда уже принимаются серьёзно за изучение

[2] Кружало – деревянное сооружение, устанавливаемое под сводом перед его кладкой. Служит для придания своду надлежащей кривизны и предохраняет его от падения до отвердения цемента. – *Прим. ред.*

математики. Если я, без предварительной подготовки, скажу им: «Нет, вы этого не знаете, вы не понимаете того, что вам казалось понятным; я должен вам доказать то, что вы считали очевидным», — и если я в своих доказательствах буду опираться на посылки, которые им кажутся менее очевидными, чем заключения, то что подумают эти несчастные? Они подумают, что математическая наука есть не что иное, как произвольно собранная груда бесполезных умствований; и они либо почувствуют к ней отвращение, либо будут забавляться ею, как игрою, и в умственном отношении уподобятся греческим софистам.

Напротив, позже, когда ученик освоится с математическим суждением и ум его созреет в этой продолжительной работе, сомнения станут возникать сами собой, и тогда ваше доказательство будет своевременным. Оно разбудит новые сомнения, и вопросы предстанут перед юношей в той последовательности, в какой они представлялись нашим отцам; и это будет продолжаться до тех пор, пока он не разовьётся в такой мере, что его будут удовлетворять только совершенно строгие определения. Недостаточно ещё во всём сомневаться, нужно знать, почему возникает сомнение.

8. Главная цель обучения математике — это развить известные способности ума, а между этими способностями интуиция отнюдь не является наименее ценной. Благодаря ей мир математических образов остается в соприкосновении с реальным миром; и если чистая математика может обойтись без неё, то она всегда необходима, чтобы заполнить пропасть, которая отделяет символы от реального мира; к нему будет постоянно обращаться практик, а ведь на одного чистого геометра приходится сто практиков.

Инженер должен получить полное математическое образование, но для чего оно ему? Для того чтобы видеть различные стороны вещей, видеть их быстро. У него нет времени гоняться за мелочами. В сложных физических предметах, которые представляются его взору, он должен быстро найти точку, к которой могут быть приложены данные ему в руки математические орудия. Как бы он это сделал, если бы между предметами и орудиями оставалась та пропасть, которую вырыли логики?

9. Наряду с будущими инженерами имеются ученики, не столь многочисленные, которые должны стать учителями. Последние должны дойти до конца; для них прежде всего обязательно глубокое и строгое изучение основных принципов. Но отсюда не следует, что в них не надо культивировать интуиции. Ибо они могут составить себе ложное представление о науке, если всегда будут смотреть на неё с одной только стороны, и они не сумеют развить в своих питомцах того качества, которым сами не обладают.

Для чистого геометра эта способность необходима. Доказывают при помощи логики, изобретают при помощи интуиции. Хорошо уметь критиковать, ещё лучше — уметь творить. Вы способны распознать, правильна ли данная комбинация, и это недурно, раз вы не обладаете искусством сделать выбор между всеми возможными комбинациями. Логика нам говорит, что на таком-то пути мы можем быть уверены, что не встретим препятствий; она не говорит, какой путь ведёт к цели. Для этого необходимо видеть цель издалека, и интуиция есть та способность, которая этому нас учит. Без неё геометр походил бы на писателя, который был бы прикован к грамматике, но не имел бы идей. Но как может развиться такая способность, раз её пре-

следуют и изгоняют, лишь только она обнаруживается, раз приучают относиться к ней с недоверием еще раньше, чем убедились в пользе, которую она может принести.

Позвольте мне здесь мимоходом остановиться на важности письменных работ. Эти работы занимают, быть может, слишком мало места на экзаменах, например, в Политехнической школе. Мне говорят, что такие работы закрыли бы доступ хорошим ученикам, которые понимают пройденные курсы, хорошо их знают, но не способны сделать из них ни малейшего применения. Я сказал выше, что слово «понимать» имеет несколько значений: эти ученики «понимают» определения в первом из указанных мною значений этого слова; но мы видели, что такого понимания недостаточно ни для инженера, ни для геометра. А так как здесь необходимо сделать выбор, то я предпочитаю выбрать тех, которые понимают вполне.

10. Но искусство правильно рассуждать разве не есть драгоценное качество, которое преподаватель математики должен прежде всего культивировать? Я этого не забываю. Об этом нужно позаботиться с самого начала. Я был бы в отчаянии, если бы увидел, что геометрия выродилась в какую-то тахеометрию[3] нижайшего уровня, и нисколько не подписываюсь под крайними доктринами некоторых немецких оберучителей. Но при изучении математики и именно тех отделов её, где указанные выше неудобства не встречаются, бывает немало случаев, которые дают место для упражнения учеников в правильном рассуждении. У нас имеются длинные сцепления теорем, в которых абсолютная логика сразу и как будто естественно заняла господствующее положение и которые, как образцы, вышедшие из рук первых геометров, достойны всякого удивления и подражания.

Именно в изложении основных принципов нужно избегать излишних тонкостей. Здесь они и не привились бы и к тому же были бы бесполезны. Нельзя всё доказать и нельзя всё определить. Приходится всегда делать заимствование у интуиции. Неважно, сделаем ли мы это заимствование немного раньше или немного позже, будет ли оно немного больше или меньше, лишь бы мы, правильно пользуясь теми посылками, которые даны нам интуицией, научились правильно рассуждать.

11. Можно ли, однако, удовлетворить столь противоположным условиям? Возможно ли это в особенности тогда, когда приходится дать определение? Как найти такую краткую формулировку, которая одновременно удовлетворяла бы непреклонным правилам логики, нашему желанию понять то место, которое занимает новое понятие в совокупности знаний, нашей необходимости мыслить образами? Чаще всего такой формулировки найти нельзя, и вот почему недостаточно высказать определение: необходимо его подготовить и необходимо его оправдать.

Что я хочу этим сказать? Вы знаете, как часто говорят: всякое определение включает в себя аксиому, так как оно утверждает существование определённого объекта. Определение будет, следовательно, оправдано с точки зрения логической лишь тогда, когда будет доказано, что оно не находится в противоречии ни с терминами, ни с ранее допущенными истинами.

Но это не всё. Определение теперь называют соглашением; но большинство умов возмутится, если вы захотите навязать это определение как соглашение произ-

[3] Тахеометрия – раздел геодезии, посвящённый изучению методов измерения на земной поверхности с помощью специального прибора – тахеометра. – *Прим. ред.*

вольное. Они успокоятся только тогда, когда вы им дадите ответ на многочисленные вопросы, которые у них возникнут.

Чаще всего математические определения, как это показал Лиар, суть целые построения, составленные при помощи простейших понятий. Но почему эти элементы соединены именно данным образом, когда возможна ещё тысяча других способов соединения? Каприз ли это? А если нет, то почему данная комбинация имеет больше прав на существование, чем все прочие? Какой необходимости она отвечает? Как можно было предвидеть, что она сыграет важную роль в развитии науки, что она сократит наши суждения и наши вычисления? Существует ли в природе некоторый особый предмет, который является, так сказать, неясным и грубым прообразом такой комбинации?

Это не всё. Если вы ответите на эти вопросы удовлетворительно, то мы увидим, что принятую комбинацию нужно окрестить каким-либо именем. Но выбор имени не является произвольным. Нужно объяснить, какими аналогиями руководились, избирая имя. Если же аналогичное имя присваивалось различным вещам, то нужно показать, что эти вещи отличаются между собой только материально, по форме же близки друг к другу, что их свойства подобны и, так сказать, параллельны.

Вот какой ценой можно удовлетворить всем притязаниям. Если формулировка достаточно правильна, чтобы удовлетворить логика, то её оправдание удовлетворит интуитивиста. Но лучше поступить иначе: необходимо, чтобы оправдание во всех случаях, когда это возможно, предшествовало формулировке и подготовляло её; изучение нескольких частных примеров лучше всего приводит к общей формулировке.

Ещё другое обстоятельство: каждая часть формулированного определения имеет целью установить отличие определяемого объекта от класса других близких предметов. Определение будет понято лишь тогда, когда вы покажете не только определяемый предмет, но и те соседние предметы, от которых его надобно отличать; когда вы сделаете явственным это отличие и при этом прибавите: «Вот для чего я внёс в определение то-то и то-то».

Вернуться к содержанию



Дискуссия

ЕГЭ по математике и реальный уровень математического образования современных школьников



Дмитрий Эммануилович ШНОЛЬ
учитель математики школы-интерната
«Интеллектуал» г. Москвы
dshnol@mail.ru

Каждый четвёртый выпускник 2008 года получил «2» на ЕГЭ по математике. В сравнении с результатами традиционного экзамена такое количество двоек на ЕГЭ выглядит удручающе. Естественно, по этому поводу в обществе ведётся горячая дискуссия. Однако при чтении статей на эту тему меня не оставляет чувство, что в них говорится о вещах второстепенных (количестве заданий, корректности формулировок, равноценности вариантов и т.д.), а самое главное обходится стороной.

Ниже я попытался описать это «самое главное», как я его понимаю.

Я работаю учителем математики с 1990 года. Девять лет я работал в обычной государственной школе (школа № 875 г. Москвы), 3 года в частном лицее (химический лицей «Авогадро»), 6 лет в государственной школе «для одарённых детей» (школа-интернат «Интеллектуал»). Неоднократно я выпускал 11-е классы. Мои соображения основаны на этом опыте. Естественно, мои числовые оценки могут быть неточны – пусть коллеги меня поправят.

Прежде чем говорить о ЕГЭ, я коротко опишу ситуацию в школьном математическом образовании до введения ЕГЭ: при «классическом» выпускном экзамене.

По моему опыту работы в обычной школе (в 90-е годы) в каждом неспециализированном классе было 2–3 ученика (то есть 8–15% класса, в зависимости от наполняемости), которые не могли самостоятельно написать выпускной экзамен на положительную оценку. Бывали и слабые классы, где таких учеников было больше.

Это, конечно, не означало, что такие ученики совсем ничего не знали. На оценку «3» нужно было решить 3 задачи из 6 (за 4 часа). Некоторые из них могли решить полторы-две задачи, но для «тройки» этого было недостаточно. Кроме того, практически в каждом классе были нервные дети, которые всегда контрольные работы писали на балл-полтора хуже своих знаний, так как сам факт контрольного мероприятия вводил их в ступор. Некоторые из них тоже могли неожиданно написать экзамен на «2», если его проводить честно.

Положение дел всем было известно. Его знали учителя, администрация, иногда родители и сами ученики. При этом все также знали, что «2» на экзамене почти наверняка не поставят. Скорее уж школа не допустит заядлого прогульщика до экзаменов, чем будет позориться на весь район (город) выставлением двойки на экзамене. Написать «классический» экзамен на положительную оценку, не имея нужных знаний, было не так уж трудно. Существовали следующие варианты решения проблемы.

1. Так как работа присылается только в двух вариантах, то решения можно узнать у более знающих одноклассников прямо в классе (зале), где проходит экзамен.

2. Можно выходить в туалет и там знающие ученики обычно оставляют решения нескольких первых задач (по договоренности заранее).

3. Родители кормят детей в середине экзамена и могут передать записку.

4. Помогают учителя, члены комиссии (обычно для соблюдения приличий – не тот учитель, который учил данный класс).

5. Наконец, пожарный вариант: если ученик не воспользовался ни одним из этих способов и сдал работу на «2», то учитель (член экзаменационной комиссии) исправляет сданную работу ручкой того же цвета или даже пишет работу своей рукой от лица нерадивого ученика.

Я в своей практике наблюдал все пять перечисленных вариантов «поддержки». Наверное, бывали и другие.

Но это, так сказать, технология. Теперь идеология. Такое положение дел – заведомое выставление «троек» всем, кто сдаёт экзамен – не вызывало в обществе (учительском сообществе, у родителей, у нормального начальства) осуждения и желания всё срочно переделать, так как оно было **педагогически оправданно**. Это очень важный пункт и его нужно рассмотреть подробно.

В любом не отобранном классе есть дети слабые, средние и сильные. Ещё есть обязательная категория способных, но ленивых учеников – это важнейший национальный ресурс, именно из таких учеников часто вырастают прекрасные профессионалы, творческие люди и т.п. При наличии такой разной публики есть только два варианта: либо сильно снизить уровень выпускного экзамена, чтобы его могли сдавать слабо обучаемые дети, либо оставить уровень экзамена достаточно высоким, но закрывать глаза на «нижнюю часть списка». Неважно, из каких соображений в отечественном образовании сложился именно второй вариант («с приписками»), важно, что он более разумный, чем «честный» экзамен.

При этом **такой вариант сдачи экзамена хорош как с точки зрения отдельного ребенка и его семьи, так и с общегосударственной, национальной точки зрения.** Серьёзный экзамен поддерживает средний уровень математической культуры и не дает расслабляться «способным бездельникам», а мягкость его сдачи не

выбрасывает за борт слабых учеников и сохраняет здоровье им и их родителям. Конечно, то, что мягкость достигалась за счёт всеобщего вранья – это не очень здорово, но в тех политических обстоятельствах это было оправданно.

Разумеется, такое проведение выпускного экзамена (школа сама экзаменует своего ученика и ставит всем пришедшим не ниже «3») имеет свои опасности. Чем при таком положении «приличная» школа советских времен отличалась от «неприличной»? В приличной школе оценки «4» и «5» нужно было честно заработать, в неприличной и их можно было получить без достаточных знаний. Тем самым оценка в аттестате отражала не реальный уровень ученика, а являлась функцией от двух переменных – уровня ученика и уровня школы (учителя). Однако это неудобство было не особенно заметно: вузы отбирали абитуриентов сами, а оценки в аттестате (особенно после отмены «среднего балла») вообще мало кому были нужны, кроме старших родственников выпускника.

Подведём итог. До введения ЕГЭ существовала некоторая технология сдачи выпускных экзаменов, по которой в обществе существовал консенсус: экзамен не совсем честный (особенно в «нижней части списка»), но не гробящий судьбу и здоровье выпускника и не ставящий под сомнение профессиональную пригодность учителя.

Каково же было удивление общества (прежде всего учительского корпуса), **когда высокое начальство стало делать вид, что оно про эту технологию ничего не знает (или, наоборот, хочет вывести её на чистую воду).** Начальство захотело иметь «честный» экзамен, но сохранить при этом тот уровень «тройки», который был возможен только при «нечестном», мягком экзамене. Такое начальственное двуличие повергло учительское сообщество в шок. Не решаясь сказать о главном, учителя стали говорить о достаточно важных, но всё-таки второстепенных вещах: количестве заданий, соотношении разных тем, вреде или пользе заданий с выбором ответов, корректности условий или решений и т.д. **А сказать нужно вот что: если «честно» писать традиционный экзамен, то процент двоек будет тоже очень велик. Мы их не ставили и правильно делали.**

На всю эту «реформу» наложился ещё и процесс медленного, но неуклонного падения математического уровня российских школьников, что признают практически все работающие в школе учителя. Есть распространенное мнение, что сам ЕГЭ и вызвал это падение. Я так не думаю. Люди, которые считают, что стоит отменить ЕГЭ, написать (переиздать) хорошие учебники, поддержать материально учителя, улучшить подготовку в педвузах и можно будет постепенно вернуться к уровню 60–70-х годов – эти люди слишком большие оптимисты. Я думаю, что причины падения образования гораздо глубже и всеми перечисленными мерами мало что можно сделать[1]. Это не означает, что всего этого делать не стоит. Но осознавать, что основные причины падения уровня образования мы этим не устраним, необходимо: чтобы не питать иллюзий, не искать врагов, чтобы, наконец, не отчаиваться от скромности достигнутых результатов.

Вернёмся к ЕГЭ по математике в его современном виде. Современный формат проведения выпускного экзамена по математике имеет три кардинальных отличия от традиционного экзамена.

---

[1] Об этом см. далее в Приложении.

I. Выпускники пишут экзамен в присутствии независимых наблюдателей (как правило, не у себя в школе), учителя математики на экзамен не допускаются, экзаменационные работы проверяет независимая комиссия.

II. Результат ЕГЭ выпускник может использовать при поступлении в вуз.

III. Количество заданий, их сложность и особенно форма записи резко отличаются от традиций отечественного образования.

Моё отношение к этим нововведениям таково.

I. Попытку сделать экзамен более честным в принципе стоит приветствовать. Как известно, «говорить правду легко и приятно». Но для начала нужно сказать правду о существующем положении вещей. А именно: «нечестный» экзамен, ставший нормой последние 30 (40?) лет, обусловлен не тем, что большинство учителей плохо работают или берут взятки, а множеством объективных причин. Во-первых, тем, что было введено обязательное среднее образование, и программа, первоначально рассчитанная не на всех, стала общеобязательной. Во-вторых, тем, что школьное и более высокое начальство стало практически запрещать ставить в году «2» и оставлять учеников на второй год. В-третьих, тем, что в целом ухудшилось здоровье учеников, а, значит, их способности к обучению и т.д.

Авторы реформы должны были сказать учителям следующее.

> Всем известно, что последние годы вы часто ставили вместо «двоек» «тройки». К сожалению, другого выхода у вас не было. Ученик, имеющий «2» хотя бы по одному предмету, не мог получить аттестат, и вся его дальнейшая жизнь была бы искалечена. Вы ставили нечестные «тройки» и выпустили в жизнь множество молодых людей, которые смогли начать свою взрослую жизнь без общественного клейма и комплекса неполноценности. Большое вам спасибо: в трудных условиях вы поступали правильно!
>
> Но теперь мы хотим попробовать уменьшить количество вранья в нашей жизни и ввести более объективный экзамен. Можно надеяться, что при таком экзамене школьники будут более ответственно подходить к учебе и не уповать на то, что «3» всё равно поставят. Понятно, что сделать переход от «нечестного», но не травмирующего экзамена к более объективному, но и более травматичному довольно сложно. Особенно когда положение в школьном образовании оставляет желать лучшего. Мы надеемся на вашу помощь и поддержку и готовы к широкому гласному обсуждению как целей, так и методов проводимых изменений (конец воображаемой цитаты).

Вот то минимально необходимое послание, которое по идее должно было получить от власти общество в целом и учительское сообщество в особенности. Насколько я знаю, ничего подобного сказано и сделано не было.

Жёсткое административное введение более «объективного» экзамена привело к легко предсказуемым результатам. Выпускники написали его очень плохо, а общий накал страстей оказался так велик, что спокойное профессиональное обсуждение ситуации потонуло во взаимных проклятиях и политических обвинениях. Однако без такого обсуждения улучшить ситуацию невозможно.

Сейчас положение с выпускным экзаменом по математике выглядит следующим образом. Существуют как минимум три требования, которые **не могут быть совмещены**, если экзамен проходит «честно». Это:

1) обязательность для всех выпускного экзамена по математике;

2) уровень оценки «3», соответствующий официальной программе 10–11-х классов;

3) невозможность выдачи аттестата зрелости при неудовлетворительной сдаче экзамена.

При попытке совместить все три требования мы неминуемо будем иметь 10–15% выпускников, которые не получат аттестат, что было бы социальной катастрофой.

Поэтому какое-то из требований нужно смягчать. Я считаю, что обязательность выпускного экзамена по математике необходимо сохранить во что бы то ни стало. Для этого можно идти на любые «жертвы». Либо выдавать аттестаты с прочерком по математике (при неудовлетворительном написании экзамена), либо, что менее болезненно для общества, резко снизить уровень, за который выпускнику выставляется оценка «3». Фактически это должен быть уровень здравого смысла, бытовых навыков счета, знания простейших понятий (проценты, чтение графиков и диаграмм, различные единицы измерения, площади простейших фигур и т.п.). Коротко говоря, с заданиями на «3» должен справляться любой успешный взрослый человек (родитель выпускника), включая водителя автобуса, фотографа, учительницу литературы и т.п. Если выпускник показывает такие же знания, как средний взрослый, который в своей жизни никак не связан с математикой, то такой выпускник, на мой взгляд, имеет полное право получить аттестат с оценкой «удовлетворительно» по математике. Уровень оценок «4» и «5» требует дальнейших обсуждений и корректировок, поэтому на некоторое время разумно отдать его в ведение самих школ.

II. Что касается второго пункта кардинальных перемен – совмещения выпускного и вступительного экзамена, – то, не будучи профессиональным преподавателем вуза, я не могу составить достаточно взвешенное суждение на этот счет. Как отцу троих детей мне такое совмещение скорее нравится, но при этом аргументы его противников мне представляются достаточно разумными.

III. И, наконец, третье кардинальное изменение: количество и форма заданий ЕГЭ до 2009 года включительно резко отличались от отечественных традиций. Чтобы не утомлять читателя подробным разбором различных вариантов, я ограничусь только перечислением основных принципов, которых я бы придерживался.

1. Заданий с выбором ответа (группа А) не должно быть вовсе.

2. Все задания на твердую школьную «четвёрку» должны быть в открытом доступе.

3. Заданий должно быть не больше 10–12, чтобы медлительные выпускники не были дискриминируемы.

4. Около половины заданий должно быть с полным решением (группа С).

Как известно, вариант ЕГЭ 2010 года по некоторым параметрам будет существенно приближен к традиционному экзамену (исключены задания группы А, увеличено число заданий группы С, уменьшено количество заданий). Можно надеяться, что под давлением педагогической общественности форма заданий ЕГЭ будет всё больше приближаться к нормам отечественной математической культуры.

Приложение

О причинах падения уровня школьного образования в последние годы

Нижеследующий текст не претендует на объективность. Я понимаю, что для ответа на такой общий вопрос необходимы обширные социокультурные исследования. Тем не менее, я позволю себе привести свои субъективные соображения – соображения человека, наблюдающего процесс изнутри.

Я думаю, что основная причина падения уровня школьного образования очень проста: нынешние дети психологически сильно отличаются от своих сверстников тридцатилетней давности. Главное отличие видно невооруженным глазом – это **повышенная тревожность**. Сейчас учатся дети, рождение и раннее детство которых пришлось на 90-е годы (нынешние выпускники родились в 91–92 годах). Их развитие в утробе матери и в ранние годы пришлись на время, когда всё общество было сильнейшим образом невротизировано происходящими переменами. Атмосфера неуверенности и страха окружала этих детей с пелёнок. Повышенная тревожность не даёт нашим ученикам долго удерживать внимание, усидчиво работать, переводить усвоенное в долговременную память и т.д. Они одновременно и более взрослые: по интересам и запросам, и более инфантильные: по реакциям на неудачи, волевым качествам и т.п.

Кроме общей невротизации взрослого общества, которую подсознательно «ловят» дети, причиной их тревожности является также **агрессивность современного социокультурного пространства**. Прежде всего, это сильное смещение шкалы ценностей в сторону соревновательности и оценки человека по критериям социальной успешности. В прежней, более архаической культуре, ценности, связанные с успехом и личной успешностью, уравновешивались ценностями дворовой дружбы, взаимной поддержки внутри класса (классический пример: списывание), важностью командной победы и т.п. Ныне же это равновесие нарушено, каждый всё более ощущает себя не игроком большой команды, а одиноким бегуном, бегущим по своей дорожке.

Кроме этого общую тревожность детей вызывает разлитое в атмосфере чувство нехватки времени: *торопись, а то опоздаешь!* Это «торопись» постоянно навязывается современному человеку рекламой, новыми средствами связи и информации. Медлительные и вдумчивые дети (да и взрослые) чувствуют себя в этой атмосфере крайне некомфортно и не могут проявить свои сильные стороны (например, глубину понимания).

Следствием постоянного чувства тревоги является то, что современные люди, а в особенности подростки, привыкли жить с постоянным музыкальным или речевым фоном. Ужин или завтрак под включённый телевизор является нормой. Ученики, которые делают домашнюю работу в тишине, составляют исчезающее меньшинство. Эта привычка приводит к тому, что и происходящее на уроке современные дети автоматически воспринимают как некий шумовой фон, и, вроде бы слушая учителя или одноклассника, на самом деле его не слышат. Всё буквально проходит мимо их ушей.

Последняя вещь, которую я бы отметил, как важнейшую причину проблем современных подростков – это слишком раннее и практически насильственное знакомство с половой сферой жизни человека. Эта сложная сфера, требующая личностной зрелости, у современного душевно инфантильного подростка способна забирать практически все его силы. Подросток не может нормально учиться, потому что голова его занята совершенно другим и этот груз для него непосилен.

Наконец, за последнее время в целом изменилось и отношение общества к образованию: это отношение стало более прагматичным. Ещё лет 30 назад в отечественной культуре само по себе знание было ценностью. Теперь знания ценны или нет по отношению к моим личным целям (будущей работе, конкурентоспособности и т.д.). В поздние советские годы выходил киножурнал для детей с броским названием: «Хочу всё знать!» В нём рассказывалось об открытиях в разных областях науки. Само желание «всё знать» тогда вовсе не казалось идиотским. Общего в наше время ощущения, что отдельный человек не может знать и сотой доли того, что «знает» современная наука (то есть человечество в целом), не было и в помине. В культуре поддерживалось старое просвещенческое отношение к учёным, как к универсалам мысли и энциклопедистам. В этом смысле образ учёного в массовой культуре сильно отставал от реальности. Теперь же в понимании общества учёный – это специалист, эксперт в своей узкой области (и только в ней ему можно доверять), выбравший направление работы по своему вкусу и никакими «универсальными» знаниями не обладающий. Надо сказать, что такое описание, к сожалению, более точно соответствует ситуации в современной науке. Таким образом, «универсальность» школьного образования потеряла свою поддержку в системе ценностей современной культуры. Уже малые дети знают из «культурного воздуха», что всё знать невозможно, лишнего знать не нужно, а знание нужно использовать в своих личных целях. И тогда: *зачем мне **Ваша** теорема о вписанном угле, скажите на милость*? Хочу отметить, что эта смена взгляда на науку и образование, на мой взгляд, вещь объективная, и искать виновных в ней не имеет смысла. Можно ностальгически вздыхать о былом уважении к Знанию, можно и нужно стараться противостоять общему потоку, но вернуться назад нельзя.

Замечу к слову, что те выдающиеся успехи в школьном математическом образовании, которые мы видим в азиатских странах (Китай, Корея, Сингапур и др.), на мой взгляд, связаны не с какой-то «генетической одарённостью», и уж, конечно, не с особенно удачными учебниками или формой выпускного экзамена. Основная причина успеха глубже – это более традиционные модели семейного воспитания. В этих моделях высок авторитет взрослого (отца, матери, учителя) и статус знания самого по себе. Отсюда и результаты учеников. Если эти страны будут достаточно глубоко вестернизированы, с большой вероятностью можно ожидать и в них ухудшения уровня школьного образования, которое наблюдается у нас, в Европе и Северной Америке.

Я перечислил кратко основные причины, которые влияют на уровень образования, – как они мне представляются. Читатель, конечно, заметил, что среди них нет ни формы экзамена, ни качества учебников, ни даже количества часов в учебном плане. Я думаю, что все эти важные сами по себе вещи **на порядок** менее значимы, чем культурные и психологические причины, перечисленные выше. Кратко можно сказать так: ученика, желающего учиться и не рассеянного своей постоянной тревогой, можно научить по не самым лучшим учебникам, имея и не очень удачную форму выпускного экзамена. Ученика, который и не хочет и не может учиться, потому что у него куча личных психологических проблем, очень трудно не только научить, но хотя бы натаскать на необходимый минимум. В этом и состоит главная проблема современной отечественной школы или – правильнее – всего нашего общества.

◀ Вернуться к содержанию

Подводные камни ЕГЭ[1]



Виктор Васильевич ФИРСОВ (1942–2006)
зам. директора Института содержания и методов обучения
Российской академии образования (до 1992 г.)

Введение

Идея совмещения школьных выпускных и вузовских вступительных экзаменов с первого взгляда кажется безусловно привлекательной. Логика, лежащая в её основании, довольно проста: в вузы надо принимать лучших по стране выпускников школы, а для их определения достаточно формализовать и унифицировать школьные выпускные оценки. Ведь многие университеты во всём мире принимают студентов без вступительных экзаменов на основе результатов школьных тестов.

Эта идея была впервые публично выражена В.П. Беспалько более тридцати лет тому назад в породившей большой общественный резонанс статье в «Литературной газете». Статья широко обсуждалась в общей и профессиональной прессе. В ходе обсуждения высветились многие подводные камни предложенного подхода – простота оказалась обманчивой. Неясно было всё – и что такое лучший выпускник школы, и станет ли он хорошим студентом, а тем более хорошим выпускником вуза, и как это связано с его отметками, и поддается ли этот подход хоть какой-то разумной формализации, и так ли уж нам подходит пресловутый западный опыт.

Старая дискуссия выявила и поле согласия. Достаточно быстро стало ясно, что на вступительных экзаменах в принципе решаются две разные задачи. Первая из них – отсеять тех поступающих, которые недостаточно готовы к обучению в вузе. Вторая – отобрать наиболее подготовленных из оставшихся. Выяснилось, что по отношению к этим задачам разные вузы находятся в совершенно различном положении: одни из них озабочены преимущественно решением первой задачи, тогда как другие вынуждены сосредоточиться на второй. Между тем эти задачи следует решать совершенно разными методами, что многократно повторяют все специалисты в области педагогических измерений. Так вот, решение первой задачи в принципе возможно передоверить школе при условии применения определенных унифицирующих процедур, и это, видимо, удовлетворит многие вузы. В то же время решение второй задачи, если она возникает, следует всегда оставлять за вузами.

Кстати сказать, уже тогда был наработан определённый опыт унификации экзаменов посредством открытой публикации избыточных перечней экзаменационных заданий по типу знаменитого сборника задач по математике под редакцией М.И. Сканави, по которому в течение многих лет проводились вступительные экзамены в большинстве технических вузов страны. Этот же опыт широко использовался и в школьной практике.

---

[1] Текст с небольшими изменениями перепечатан из журнала «Вопросы образования» (№ 2, 2004).

К сожалению, современные дискуссии об единых государственных экзаменах (ЕГЭ), которые ведутся на бумажных и виртуальных страницах в течение нескольких последних лет, протекают по хорошо накатанной схеме. В одной аудитории собираются, скажем, сторонники ЕГЭ. Они с увлечением критикуют очевидные недостатки традиционных экзаменов и превозносят достоинства ЕГЭ. В это же время в другой аудитории (чаще виртуальной) противники ЕГЭ столь же рьяно клеймят очевидные минусы ЕГЭ и подчёркивают плюсы традиционных экзаменов. Самое привлекательное в таких дискуссиях, что все участники всегда оказываются правы, а оппоненты – всегда неправы.

Впрочем, описанная выше симметрия – только кажущаяся. В подобных случаях к участникам, предлагающим инновации (в нашем случае – к сторонникам ЕГЭ), следует применять своеобразную презумпцию виновности: бремя доказательства целесообразности, реализуемости и эффективности нововведения лежит на них. В частности, именно они обязаны проанализировать возможные альтернативы предлагаемым решениям и оценить риски, неизбежно сопровождающие любые нововведения.

А риски, очевидно, есть. В некоторых случаях их можно устранить, подправив содержание и условия проведения ЕГЭ. В других случаях риски выглядят настолько опасными, что настоятельно диктуют необходимость поиска альтернативных решений. Подобные альтернативы, безусловно, существуют, и их отсутствие в эксперименте, возможно, является одним из самых серьезных его недостатков.

Перед создателями ЕГЭ были поставлены две главные задачи, направленные «вниз» и «вверх» соответственно – на школу и на вуз. Для средней школы предлагалось разработать систему объективной проверки общеобразовательной подготовки выпускников. Исходя из полученных результатов, планировалось оценивать качество работы школ. Для вузов на основе тех же результатов предлагалось осуществлять отбор лучших выпускников для последующего получения высшего образования без традиционных вступительных экзаменов. При этом через систему государственных именных финансовых обязательств (ГИФО) планировалось напрямую связать индивидуальные результаты ЕГЭ с размером участия государства в оплате высшего образования конкретного студента (некоторые критики не без оснований полагают, что именно в этом пункте и зарыта пресловутая собака, пробудившая дорогостоящую во всех смыслах эпопею ЕГЭ). Естественно, что и анализ потенциальных рисков и возможных альтернатив уместно произвести также в отдельности для «школьного» и «вузовского» направлений.

Главная идея ЕГЭ, несомненно, – идея вузовская, идея упрощения громоздкой и неравноправной системы конкурсного отбора будущих студентов. Уже это вызывает некоторые опасения: позволительно ли существенно перестраивать всю школьную систему для решения вопроса, относящегося лишь к части её выпускников?

В интеллигентской «тусовке», обычно обсуждающей проблемы образования, сложился определённый стереотип неуважительного отношения к школе. Принято считать, что, мол, наша школа ужасна, тогда как вузы (обычно вспоминают

несколько ведущих вузов класса МГУ или МФТИ) вполне соответствуют лучшему мировому уровню. Так и сравнивают: со стороны школы – немолодую, слабо подготовленную, замотанную и замороченную учительницу Марью Ивановну, со стороны вуза – гипотетического блестящего профессора, обладающего самой высокой квалификацией.

Я, напротив, полагаю, что сегодняшняя картина системы образования выглядит в точности наоборот: наша школа, несмотря на все беды и потери последних двадцати лет, ещё вполне прилична, тогда как вузы (если не учитывать несколько ведущих вузов) весьма посредственны. И нищая идеалистка Мария Ивановна мне несравненно милей сытого деляги, осваивающего новые рыночные отношения на ниве вступительных экзаменов в какой-нибудь МУМУ (что-то вроде Международного Университета Менеджмента и Управления).

Благодаря самоотверженному и неблагодарному труду учителей школа сегодня остается, пожалуй, единственным стабильно работающим социальным институтом. Осознаёт ли наше государство и общество всю меру рисков, связанных с потенциальной деструкцией системы общего образования? В частности рисков для школы, связанных с введением ЕГЭ?

Взгляд со стороны школы

В многочисленных статьях противники ЕГЭ направляют острие критики в основном на недостатки ЕГЭ как средства конкурсного отбора в вузы. Мне представляется, что введение ЕГЭ как результирующей оценочной процедуры представляет наибольшую опасность именно для системы общего образования.

Этим актом окончательно закрепляется **вузоцентристская ориентация школы**, т.е. её направленность на подготовку выпускников к получению высшего образования. Поступление в вуз конституируется как единственный успешный финал школьных лет. Нет сомнения, что школа адекватно оценит посылаемый ей сигнал: прагматичное «образование для» окончательно вытеснит самоценный процесс образования личности.

Конечно, для многих родителей, которые не мыслят будущего своих детей без высшего образования, вузоцентризм школы вполне естественен. Эту тягу заметно подпитывают недостаток качественных каналов получения начального профессионального образования, безработица молодежи, армейский беспредел и, не в последнюю очередь, снижение требований при поступлении в расплодившиеся сегодня вузы. Хуже всего, что со времён партийных постановлений 1930-х гг., определивших вузовскую ориентацию средней школы, она стала естественной для многих педагогов. Не случайно, что до сих пор та школа считается лучше, откуда больше детей поступают в вузы.

Неоднократно отмечалось, что ориентация на высокую вузовскую планку деформирует условия обучения для многих детей, формирует отрицательную мотивацию учения, создает перегрузку. У относительно менее успешных школьников формируются комплексы неполноценности, с которыми они отправляются во взрослую жизнь.

Можно возразить, что вузовская направленность относится, прежде всего, к полной средней школе, куда идут как раз те школьники, которые планируют последующее обучение в вузе. Мне, однако, подобное возражение не кажется состоятельным. Силовое поле вузоцентризма воздействует на всю школу, приводя, например, к определённому отбору содержания образования, в котором значительный объем отведён тем вопросам, которые не являются фундаментальными, не обладают общекультурной ценностью, но, безусловно, полезны для вступительных экзаменов (я намеренно не написал – полезны для получения высшего образования).

Силовое поле вузоцентризма порождает порочную практику **селекции школьников** по уровням общеобразовательной подготовки. Сегодня она начинается, несмотря на строжайшие запреты, при приёме ребёнка в первый класс, продолжается во всё больше распространяющейся антипедагогичной практике разведения детей по классам для «сильных», «средних» и «слабых» учащихся и, наконец, получает финальное завершение в отсеве слабо подготовленных детей при приёме в старшие классы. Последний шаг сейчас планируется легитимизировать посредством введения так называемого «малого ЕГЭ», по результатам которого будут отбираться лучшие школьники в профилируемую старшую школу.

Важнейший по значимости аргумент сторонников ЕГЭ – объективизация школьной оценки. Традиционная российская система школьных отметок плохо поддаётся унификации. Критерии выставления отметок весьма неопределённы и разными учителями воспринимаются по-разному – за одно и то же решение, один и тот же ответ можно получить и пятёрку, и тройку. В значительной степени это связано с тем, что в традиционной системе отметка выставляется своеобразным методом «вычитания»: полное и исчерпывающее решение (ответ) оценивается пятёркой, а за большие или меньшие погрешности ученик штрафуется соответственно большим или меньшим снижением отметки. Здесь плохо формализуются оба принципиальных момента – и критерии правильного решения (что легко выполнимо лишь для самых простых заданий), и критерии ошибок, снижающих отметку. Заметим тут же, что этот недостаток не так сильно проявляется в оценочной деятельности конкретного учителя, где единство требований обычно соблюдается, но в полную силу сказывается при сравнении отметок разных учителей. Иными словами, традиционная система отметок неплохо работает внутри класса и плохо приспособлена для использования за его пределами. Очень важное достоинство традиционной системы заключается в том, что учителя умеют работать с нею, а дети и родители адекватно её понимают.

Чтобы стало возможным продуктивное использование школьных отметок, скажем, для приёма в вузы, традиционная система должна быть унифицирована. Это можно осуществлять разными способами, и тот, который избран для проведения ЕГЭ – лишь один из ряда возможных, отличающийся, правда, сравнительной дешевизной. Посмотрим, однако, на иную, нематериальную цену, которую придётся заплатить за предложенный вариант унификации. Она состоит в **разрушении отечественной системы деятельностного контроля**, представляющей немалую культурную ценность.

Система итогового контроля по образцу, применяемому на ЕГЭ, через некоторое время распространится «вниз», и традиционная система текущего оценивания, используемая в школе, окажется трансформированной. Это значит, что преимущественно будет контролироваться не правильность выполненного решения всей задачи, а правильность полученного ответа на поставленные вопросы. Однако во многих задачах, возникающих в самых разных предметах, правильный ответ может быть найден в ходе неверного или неполного решения.

А для такого важного предмета, как математика, подобный подход представляется просто убийственным: из математики изымается её сердцевина – логическое рассуждение. Общепризнанный авторитет отечественного математического образования в значительной степени обусловлен полноценной логической конструкцией математических курсов и систематической работой учителя над формированием у школьников навыков корректных логических рассуждений. Замечу, что, в отличие от некоторых некомпетентных российских педагогов и журналистов, зарубежные специалисты в области математического образования прекрасно понимают достоинства нашей отечественной системы и с юмором относятся к якобы катастрофическим для России результатам сравнительных международных исследований типа TIMSS или PISA: провести такие исследования по нашим материалам, пусть даже самым упрощённым, невозможно – зарубежные школьники просто не смогут приступить к выполнению многих заданий. А уж проверку решений, общепринятую в России, не выдержит подавляющее большинство одногодков наших школьников. Введение ЕГЭ в его сегодняшнем варианте – весомый удар по этому нашему преимуществу. Стоит ли удивляться, что практически все отечественные математики единодушны в критике ЕГЭ?

Специалисты отмечают, что введение ЕГЭ усиливает роль механического натаскивания и запоминания в ущерб пониманию и применению. Глубоко не случайно, что уже сегодня обучение в старших классах подменяется «подготовкой к ЕГЭ».

Сторонники ЕГЭ напирают обычно на объективный характер контроля с помощью используемых процедур. Это, конечно, дело хорошее, но, рискну сказать, не самое существенное. Куда более значимо, чтобы содержание контроля было адекватно целям общего образования, чего, как мы видим, не наблюдается.

Ради чего было затевать всю модернизацию образования, разрабатывать доктрины, концепции и стандарты, если используемая система контроля будет расходиться с ними! В нормальной развивающейся системе образования лидирующим звеном является целевой компонент – ради чего мы учим детей. Цели образования отражаются в нормативных документах (читай – стандартах). Затем реализуются в программах и учебниках, в практике обучения.

Безусловно, важнейшую роль здесь играет система контроля. Существенный момент заключается в том, что через систему контроля нельзя ничего построить, но можно всё сломать. Если содержание контроля адекватно целям и содержанию образования, контроль существенно помогает их реализации. Если же содержание контроля расходится с целями и содержанием образования, то последние будут игнорироваться, и роль лидирующего норматива будет исполнять содержание контроля.

Однако, поскольку проверять можно лишь то, чему обучались дети, система контроля всегда направлена назад, в прошлое. И если мы хотим внести какие-то изменения в работу системы, то делать это через изменение контроля недопустимо; придётся пройти всю описанную выше цепочку. Поэтому система контроля не должна становиться определяющим, центральным звеном системы образования.

В нашем случае содержание ЕГЭ разрабатывалось вне связи с проектированием стандартов общего образования, что неминуемо должно привести к расхождениям между содержанием обучения и материалами экзамена. Как следствие, содержание ЕГЭ будет играть (и уже играет) роль стандарта, чем предопределяется **глубокая консервация системы общего образования**.

Говорят, что с введением ЕГЭ система образования получит объективную картину качества подготовки школьников в стране. Однако ограниченность тестовых процедур ЕГЭ позволяет поставить под сомнение валидность этой картины. Об этом же говорят, мягко выражаясь, и некоторые весьма сомнительные результаты уже проведённых ЕГЭ. К тому же оценки в ЕГЭ выставляются в зависимости от всего массива полученных результатов, так что, скажем, «тройка» одного года может заметно отличаться от «тройки» другого – это к вопросу об объективности картины. А вообще говоря, для решения подобной задачи нет нужды ввергать сотни тысяч выпускников школы в экзаменационную деятельность, достаточно ограничиться вполне разработанными и более точными методами выборочного анализа.

Введение ЕГЭ заменит накопленную оценку учебных достижений школьника результатом одноразового испытания, проводимого в достаточно необычных и дискомфортных для школьника условиях. Результат этого испытания может сильно зависеть от случайных факторов, тем более что наши школьники не знакомы с процедурами тестовых испытаний и не обладают соответствующими специфическими навыками. Это тоже иллюстрирует объективность той картины, которую мы получим по результатам ЕГЭ.

К тому же не все школьники могут успешно показать себя в ограниченном по времени тесте. Например, среди них есть тугодумы, вроде троечника А. Эйнштейна. Есть «слишком» умные, обнаруживающие в предложенных заданиях такие глубины, которые не учитывали составители. Известно ведь, что один и тот же вопрос часто оказывается простым для дилетанта и сложным для профессионала.

В привычных условиях традиционного выпускного экзамена учитель, хорошо знающий своих учеников, мог бы смикшировать подобные флуктуации. Но нам говорят: как можно позволить учителю самому оценивать свою работу!

В этом возражении всё вообще поставлено с ног на голову. Учитель оценивает не свою работу, а работу ученика. Это чиновник, не умея судить о качестве работы учителя, неправомерно оценивает эту работу по результатам ученика. Стоит подумать, не следует ли распространить этот подход не только на учителей, но и на чиновников!

Наконец, несколько соображений морально-этического и юридического характера. С одной стороны, каждый выпускник школы обязан подтвердить факт освоения им стандартов общего образования. Между тем критерии получения положительной

оценки (например, через выделение заданий, отвечающих обязательному уровню общеобразовательной подготовки) ученику неизвестны. Школьнику предлагается избыточный набор заданий, разделённых не по уровням подготовки, а по формальным критериям представления решения: группа А – задания с выбором ответа, группа В – задания с конструируемым ответом, группа С – задания с полным описанием решения. Однако ученик имеет **право, а не обязанность** участия в испытаниях на уровнях, превышающих уровень обязательных требований стандартов. Поэтому участие школьника в ЕГЭ может быть исключительно добровольным.

Я отдаю себе отчёт в том, что указанная этическая тонкость игнорируется сегодня и в традиционной практике. Мы, к сожалению, не привыкли уважать права школьников. Плохо то, что мы не имеем даже намерения это делать, игнорируя эти права и в стандартах, и в учебниках, и в содержании ЕГЭ. Но без уважения к ребёнку и его правам все разговоры о гуманистической педагогике, о сотрудничестве учителя и ученика остаются пустой болтовнёй.

Взгляд со стороны вуза

Представленные соображения представляют собой взгляд на ЕГЭ, так сказать, «снизу» – из школы. Не менее серьезные замечания находятся и у возможных потребителей ЕГЭ «сверху» – из высшей школы.

Вузы обоснованно возражают, что ЕГЭ предлагает им унифицированную механистическую процедуру взамен отбора будущего студента с учётом специфики конкретной профессиональной специализации. Для многих вузов подобный подход представляется принципиально неприемлемым. Это относится отнюдь не только к специальностям искусства или спорта. Разве при приёме будущего педагога не следует брать во внимание такие его качества, как общительность и любовь к детям? А при приёме будущего офицера – психологическую устойчивость и физическую подготовку? Будущего инженера – изобретательность и «рукастость»?

Особо следует сказать об интересах ведущих вузов страны. Глубоко не случайно, что вступительные экзамены, скажем, по математике на механико-математический, физический, психологический или филологический факультеты МГУ, проводившиеся по одной программе, были непохожи один на другой, причём не за счёт разницы в сложности заданий. Дело в том, что при подготовке профессионального математика, физика, психолога или лингвиста на первый план выходят различные аспекты математики, на которые обращается внимание соответствующих экзаменационных комиссий.

Очевидно, что разовое испытание ЕГЭ, проводимое по унифицированным тестам, все эти нюансы учесть не сможет. Это уже понимают самые рьяные сторонники ЕГЭ. Чтобы спасти положение, они предлагают узаконить «портфолио» – портфель достижений, в котором были бы отражены особенности и интересы школьника.

Эта, безусловно, полезная затея в нашем случае вряд ли окажется результативной. Портфолио ещё труднее формализовать, чем содержание контрольной работы, портфолио легко подделать, портфолио практически невозможно использовать при

решении формального вопроса о зачислении студента. К тому же проблематичная инициатива с портфолио только-только разворачивается, на накопление портфелей уйдут годы, а принимаем мы школьников в вузы по результатам ЕГЭ уже сейчас, причём отнюдь не в экспериментальных объемах.

Значительно солиднее выглядит предложение учитывать при приёме результаты предметных олимпиад. Эту схему также трудно формализовать без коллизий и конфликтов, но в её основе лежит хоть какая-то общественно контролируемая реальность. Правда, олимпиадный тип и стиль мышления весьма специфичен, и многие даже выдающиеся учёные не блистали на олимпиадах. Кроме того, мне немножко страшно за олимпиады.

Получается, что в условиях реального конкурса альтернативы традиционному экзамену нет. Вуз должен сохранить своё право отбирать себе того студента, которого полагает лучшим.

Серьёзные проблемы порождает и технологическая схема ЕГЭ. Так, разброс уровней подготовки выпускников школы не позволяет «уложить» их оценку в рамки одного испытания. Не случайно уже обсуждаются схемы проведения «единого» экзамена отдельно для гуманитариев и естественников, а также введения дополнительного испытания для «продвинутых» вузов.

С «продвинутыми» вузами вообще получается интересная картинка. Дело в том, что для поступления в эти вузы через ЕГЭ необходимо решать задачи из группы С, т.е. вполне традиционные по форме контрольные работы, с обычной полной записью решения и обычной системой проверки, слегка формализованной. Правда, эксперты отмечают, что, скажем, по математике школьникам надо бы предлагать 5–6 заданий этой группы. Ну да не в этом суть дела. А в том, что создатели ЕГЭ тем самым возвращаются к традиционной системе оценки, без которой обойтись ну никак не удаётся!

Наконец, очень серьёзные замечания (со всех сторон) высказываются в адрес конкретных материалов, по которым проводится ЕГЭ. Создатели ЕГЭ охотно признают несовершенство так называемых контрольно-измерительных материалов, которые, надо признать, год от года улучшаются. Тем не менее, до сих пор среди этих материалов можно найти и сомнительные, и неточные, и некорректные задания. На мой взгляд, это во многом обусловлено неэффективной технологией подготовки контрольно-измерительных материалов, плохо защищённой от сбоев.

Неудачные задания и ошибки могут встретиться всегда. Даже на вступительных экзаменах на механико-математическом факультете МГУ, где работают самые квалифицированные специалисты, предлагались задачи, по существу требующие внепрограммных знаний (1967 г.), а то и просто неверные (1959 г.). Я хорошо помню последний случай: 45 лет тому назад я сдавал этот экзамен, причём мне как раз достался вариант с одной неверной задачей. Тогда руководство факультета аннулировало все отрицательные отметки и предложило всем желающим заново сдать письменную математику. Неприятно, конечно, но не смертельно, а главное, ограниченно по объему. А теперь представьте себе аналогичный эффект, затрагивающий не один вариант одного факультета конкретного вуза, а громадный поток сдающих ЕГЭ!

Мощным и эффективным способом предупреждения ошибок в контрольно-измерительных материалах и повышения их качества явилась бы открытая публикация избыточного перечня всех используемых материалов по образцу упомянутого выше задачника под редакцией М.И. Сканави. В этом случае с материалами работал бы не узкий круг привлечённых экспертов, как сегодня, а тысячи педагогов и школьников, которые моментально определили бы все неточности и ошибки.

Сегодня же мы утешаем себя тем, что нам удаётся улучшать задания и устранять их погрешности, правда, на следующий год после проведения экзамена. Слабое утешение для сдававших в этом году! Такими темпами процесс разработки качественных экзаменационных материалов затянется на долгие годы. Кстати сказать, опыт стран Запада (где также использовались закрытые базы задач) показывает, что формирование качественных контрольных материалов занимает десятилетия.

Критический анализ аргументов в защиту ЕГЭ показывает их несостоятельность, либо возможность применения других, более целесообразных схем. Так, главный аргумент сторонников ЕГЭ – утверждение о повышении доступности высшего образования, скажем, для талантливых сельских школьников – опровергается соображениями о невозможности обеспечить им высокий уровень подготовки в той же сельской школе. Альтернативный подход, который осуществляют ведущие вузы страны, заключается в адресной очной или заочной работе с одарёнными детьми. Наверняка также возможны схемы адресной финансовой поддержки участия малоимущих школьников во вступительных экзаменах, затраты на которую окажутся несопоставимыми с тратами на проведение ЕГЭ.

И здесь мы подходим к болезненному вопросу об организации эксперимента по ЕГЭ. Следует со всей определённостью констатировать, что при его планировании оказались проигнорированы все законы жанра. Ответ был известен заранее, а цель эксперимента сводилась к отработке технических деталей. Руководителей эксперимента, казалось, больше волновали вопросы обеспечения секретности, нежели поиск оптимальных педагогических решений. Иначе трудно объяснить, почему проверялась лишь единственная достаточно жёсткая схема проведения экзамена, почему ЕГЭ проводился в исключительно закрытом режиме, так что информацию о нём приходилось буквально выцарапывать, почему в столь беспрецедентных объёмах использовался административный ресурс как по отношению к школам, так и к вузам.

Заключение

Сегодня об эксперименте по введнию ЕГЭ можно забыть, ибо нельзя считать экспериментальной ситуацию, в которой участвует большинство школьников. Корабль российского образования уже двинулся по курсу ЕГЭ, и теперь ему предстоят неприятные встречи с подводными камнями и рифами, о которых я говорил выше. Что же можно сделать, чтобы минимизировать негативные последствия будущих столкновений?

Ключевым вопросом здесь является разделение итоговой аттестации учащихся на обязательном и повышенном уровнях общеобразовательной подготовки.

В соответствии с Законом РФ об образовании выпускники школы обязаны подтвердить факт освоения ими стандартов образования. Поэтому проверка освоения обязательного уровня общеобразовательной подготовки должна осуществляться в безусловном порядке. В то же время установление факта превышения минимальных требований стандартов может осуществляться только с добровольного согласия школьника. Целесообразно разделить эти две задачи и решать их в рамках различных процедур.

По самому смыслу вопрос о достижении школьником обязательного уровня общеобразовательной подготовки имеет два возможных ответа – «да» или «нет». Это означает, что установление факта достижения школьником обязательного уровня общеобразовательной подготовки может быть проверено в испытаниях зачётного типа, содержание которых отвечает этому уровню. Выбор проверяемых предметов, времени проведения и само проведение таких испытаний вполне естественно доверить непосредственно школе (оказав ей, разумеется, необходимую помощь путём разработки и публикации соответствующих материалов). Документы об образовании, выдаваемые школой, подобно вузовским дипломам должны удостоверять лишь факт обязательного освоения стандартов. При этом они могут сопровождаться вкладышем типа вузовского, описывающим полученные в школе отметки (а в перспективе и данные портфолио школьника).

Заслуживает внимания также предложение М.Р. Леонтьевой об установлении факта достижения школьником обязательного уровня общеобразовательной подготовки без проведения зачётов непосредственно по результатам школьных отметок. Возможны и комбинации этих двух подходов.

Для школьников, планирующих продолжение образования в вузе, целесообразно проводить единые государственные экзамены, которые тем самым становятся добровольными. Содержание ЕГЭ должно быть откорректировано с учётом направленности подобных ЕГЭ на проверку освоения повышенных уровней подготовки. При организации и проведении ЕГЭ целесообразно использовать успешный опыт централизованного тестирования.

Следует обязать вузы принимать полученные таким образом результаты ЕГЭ. Однако должно быть также обеспечено право вуза проводить дополнительные испытания по профильным для будущей специальности школьным предметам, о чём должно быть объявлено заблаговременно.

◀ **Вернуться к содержанию**



Двойной юбилей — академии и академика



Ольга Алексеевна САВВИНА
зав. кафедрой математического анализа и элементарной математики Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина
oas5@mail.ru



Валентина Алексеевна ТЕЛКОВА
доцент кафедры современного русского языка и методики его преподавания Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина

В этом году отечественная наука отмечает два знаковых события: 285 лет со дня основания Российской академии наук и 300 лет со дня рождения Василия Евдокимовича Адодурова – первого её русского адъюнкта и почётного члена.

В области науки и образования Россия, как известно, долгое время отставала от Запада. В Руси XV–XVI веков в существовавших тогда братских и монастырских школах можно было получить лишь элементарное общее образование (научиться чтению, письму, грамматике, риторике и пр.). В то время как в Европе ещё в XII веке было узаконено высшее учебное заведение – университет. А к началу XVIII века университеты появились в Англии, Франции, Германии. Более того, в Европе были созданы особые научные учреждения – академии.

Но в XIX веке в науке и образовании России был сделан настоящий прорыв. В течение нескольких десятилетий в нашей стране был усвоен и осмыслен пласт научных знаний (особенно в области естествознания и математики), накопленный в мире за тысячелетия. Причём это усвоение и осмысление было творческим, оно сопровождалось открытием новых научных фактов и генерированием новых науч-

ных идей. Очень быстро, уже в XVIII веке, в Европе огромную популярность приобрёл научный журнал, который начал издаваться в России в 1728 г. – ежегодное издание Петербургской академии наук «Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae». А в XIX столетии мировое признание получили открытия, сделанные русскими учёными, например, математиками Н.И. Лобачевским, П.Л. Чебышёвым, химиком Д.И. Менделеевым и др.



Здание Петербургской Академии наук

Решающим фактором небывалого в мировой истории прогресса науки и образования в России, несомненно, стало создание собственной Академии наук в 1724 г. Во время своих зарубежных поездок Пётр I интересовался работой необычных для России научных (и образовательных) учреждений, встречался с иностранными учёными и проникся идеей о создании научного центра в России. Любопытно, что царь здесь проявил несвойственные его характеру осмотрительность и неторопливость. План создания научного центра Пётр I вынашивал несколько лет. Он много консультировался с иностранными учёными, в частности с Г.-В. Лейбницем и Хр. Вольфом. Своих сподвижников (Я. Брюса, Л. Блюментроста и др.) император отправил за границу для изучения опыта и приобретения книг и оборудования. Окончательное решение о создании Академии наук было оформлено указом Сената лишь 8 февраля (28 янв. по старому стилю) 1724 г. В Указе говорилось: «Вседержавнейший Пётр Великий... указал учинить Академию, в которой бы учились языкам, такоже прочим наукам и знатным художествам и переводились бы книги»[1].

Пётр I не успел дожить до фактического открытия своего детища, это дело суждено было довести до конца его супруге Екатерине. 7 декабря 1725 г. состоялось официальное открытие Академии наук. Академия состояла из трёх отделений (классов): первый объединял математику, астрономию, механику с географией, второй – физику, химию и естественные науки, третий – гуманитарные науки[2].

При Академии были учреждены свои университет и гимназия. Академическая гимназия первоначально состояла из двух отделений: немецкого (3 года обучения) и латинского (2 года обучения). Основу обучения составляли филологические дисциплины (иностранные языки, риторика, логика и др.). Преподавались арифметика, геометрия, история, география и рисование. Окончившие полный курс гимназии могли поступать в университет. Преподавали в гимназии академики и студенты университета.

Первым президентом академии был назначен лейб-медик государя Л. Блюментрост, управляющий его библиотекой. Он происходил из немецкой семьи, переехавшей в Россию при царе Алексее Михайловиче. Других академиков пришлось

---

[1] Полное собрание законов Российской Империи. Т. 7. № 4427.

[2] *Юшкевич А.П.* История математики в России до 1917 г. М., 1968. С. 74.

приглашать из-за границы. Среди учёных, приехавших в Россию, были математики Николай и Даниил Бернулли, Христиан Гольдбах, Леонард Эйлер, физик Георг Бюльфингер, астроном и географ Жозеф Делиль, историк Герард Фридрих Миллер.

В составе Академии первоначально выделялись экстраординарные профессора, профессора и самые младшие по должности – адъюнкты. Звания академика и члена-корреспондента были введены в XIX веке. Профессора должны были выполнять научную работу, читать по 4 лекции в неделю и заниматься со способными студентами, которых тогда называли елевами.

Чтение публичных лекций началось в январе 1726 г. Будучи их слушателем, А.Д. Кантемир в одном из своих произведений писал о них так:

Вот завтра учения высоки зачнутся,
Вот уж и учители заморски сберутся:
Пусть как можно всяк скоро о себе радеет,
Кто оных обучаться охоту имеет[3].

Иностранным учёным, приглашённым в Академию наук, рекомендовалось привезти с собой по одному или по два человека «младых студентов». Из Западной Европы были выписаны 8 елевов, русских же слушателей сначала в университете не было. Так, среди 38 человек, обучавшихся в Академии с 1726 г. по 1733 г., только 7 было русских. Препятствием к их обучению служил прежде всего языковой барьер.

Между тем, согласно указу Петра I, надлежало «по два человека ещё прибавить, которые из словенского народа, дабы могли удобнее русских учить»[4]. Однако в первые три десятилетия своего существования Петербургская академия наук представляла собой, по меткому выражению Б.А. Старостина, «некий иностранный анклав посреди России»[5]. Первые профессора, их помощники и студенты были иностранцами. В качестве языка преподавания здесь царил латинский, языками общения были латинский и немецкий. Известно, что протоколы велись на латинском языке.

«В первые 16 лет существования Петербургской Академии наук только один русский был принят в её научный штат: адьюнктом по классу математики в 1733 г. прошёл В.Е. Адодуров»[6]. Это назначение русского поданного выглядело тогда необычным, а сегодня – нелегко объяснимым. Чтобы приблизиться к его пониманию, обратимся к биографии нашего героя – В.Е. Адодурова.

Василий Евдокимович Адодуров родился в Новгороде 15 марта 1709 г. Род Адодуровых (в старину Ододуровых) происходил «вместе с Глебовыми и другими от прибывшего в Россию из Швеции при в. к. Дмитрии Ивановиче Донском в 1375 г. некоего Облагини»[7]. Среди предков Адодурова – воеводы, постельничие, а «один из них, Федор Григорьевич, удостоился получить в 1583 г. титул ближнего дворянина»[8]. Отсюда, с эпохи Ивана Грозного, и ведёт отсчёт причисление рода Адодуровых к дворянскому сословию.

---

[3] *Сухомлинов М.И.* История Российской Академии. СПб., 1877. Вып. 3. С.43.
[4] История Академии наук СССР. Т. I (1724–1803). М-Л., 1958. С. 434.
[5] Российская академия наук: 275 лет служения России. М., 1999. С. 275.
[6] *Уткина Н.Ф.* Михаил Васильевич Ломоносов. М., 1986. С. 53.
[7] Русский биографический словарь Ф.А. Брокгауза и И.А. Ефрона. М., 2007. С. 12.
[8] Там же.


В.Е. Адодуров

Первоначальное образование коренной дворянский сын Василий Адодуров получил в Новгородском духовном училище, затем учился в Славяно-греко-латинской академии (1723–1726), а с 1726 г. – в Академической гимназии. В 1727 г. он был зачислен в Академический университет и находился в составе тех, которые «при профессорах обретаются»[9]. Молодой Василий Адодуров пришёл в Академию, по словам его первого наставника Г.Ф. Миллера, «по собственному побуждению и с горячим желанием»[10].

Учиться молодому человеку в Академическом университете первоначально было нелегко, поскольку, как указывалось выше, преподавание велось на латинском и немецком языках, которыми Адодуров не владел. Студент со своим учителем Г.Ф. Миллером, говорящим только по-немецки, мог общаться лишь с помощью жестов. Однако в скором времени, благодаря незаурядным лингвистическим способностям и большому усердию, юноша в совершенстве смог освоить немецкий язык и владел им не хуже, чем русским.

Более того, с 1728 г. обучение в университете Василий Адодуров стал совмещать с переводческой работой. Ему поручали ответственные переводы как для первого научного журнала – «Примечания к Санкт-Петербургским ведомостям», так и для первого периодического издания Академии – «Краткие описания комментариев Академии наук». С годами слава его как опытного «толмача» только росла, и в результате в 1731 г. В.Е. Адодуров получил должность переводчика Академии.

Именно переводческая деятельность помогла Адодурову освоить как гуманитарные, так и точные научные дисциплины. По его воспоминаниям, «кроме языков, обучался я при Академии наук истории, географии, философским, математическим и физическим наукам, а именно: логике, метафизике, арифметике, геометрии, тригонометрии плоской и сферической, алгебре и некоторым другим. И может быть, чтоб в оных науках не посредственное познание получить мог, ежели бы для неискусства в тех науках академических переводчиков, не принужден был касающих до оных наук переводов почти всегда отправлять, которые не малую часть времени у меня занимали»[11].

Будучи студентом, Василий изучал анатомию, юриспруденцию и другие университетские дисциплины. Но особенно он увлёкся математической наукой, что, очевидно, не могло не привлечь внимание к нему знаменитого математика того времени Даниила Бернулли. В 1732 г. Д. Бернулли покинул Россию, а «главным математиком» в академии стал Леонард Эйлер.

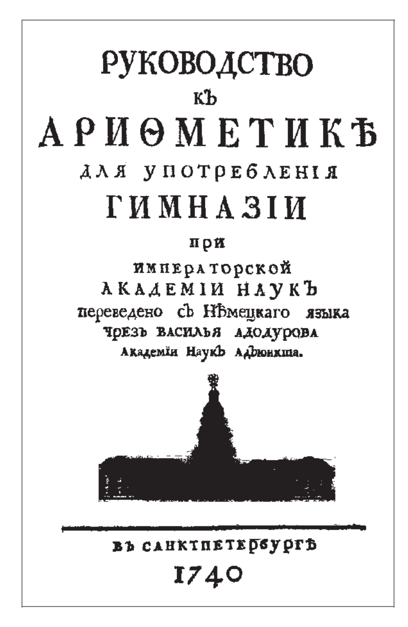
Очевидно, что Эйлеру понадобился помощник, и достаточно правдоподобно выглядит предположение, что в качестве такого помощника Даниил Бернулли предложил Эйлеру В.Е. Адодурова. Проявленные последним незаурядные математические способности, а также авторитет и рекомендации Бернулли и Эйлера стали, очевидно, решающими обстоятельствами в том, что звание адъюнкта по кафедре

---

[9] Материалы для истории Императорской Академии наук. Т. I. СПб., 1885. С. 286.
[10] Материалы для истории Императорской Академии наук. Т. VI. СПб., 1890. С. 100.
[11] *Пекарский П.* История Императорской Академии наук в Петербурге. Т. I. СПб., 1870. С. 511–512.

математики в 1733 г. получил именно русский выпускник университета – Василий Евдокимович Адодуров. До 1743 г. он оставался единственным русским, имеющим научную должность в Академии.

Итак, с 1733 г. наставником В.Е. Адодурова стал Л. Эйлер. Одним из результатов их сотрудничества явился перевод В.Е. Адодуровым сочинения Эйлера «Руководство к арифметике для употребления в гимназии при Императорской Академии наук». Это сочинение вышло в 1737 г. на немецком языке, а в 1740 г. появился перевод его первой части на русском языке, выполненный В.Е. Адодуровым.



Титульный лист «Руководства к арифметике» Л. Эйлера

В истории математического образования утвердилось мнение о том, что «Руководство к арифметике» Л. Эйлера явилось значимым событием в развитии математического образования в целом, и в истории создания русской учебной математической литературы в частности[12]. Так, Т.С. Полякова указывает на следующие достоинства учебника Эйлера: 1) систематическое изложение материала; 2) достаточно оптимальное сочетание теории и практики; 3) успешные попытки если не обосновать, то хотя бы разъяснить, растолковать каждое правило, что существенно повысило уровень строгости изложения, научности учебника; 4) доступность изложения материала, проявившаяся прежде всего в простом, ясном изложении правил, упрощённой технике вычислений[13].

К сожалению, при этом умалчивается значение В.Е. Адодурова, выполнившего сам перевод книги. Между тем русская математическая терминология находилась в то время только на этапе становления. Нам известен лишь единственный опыт создания арифметической терминологии на русском языке, предпринятый в «Арифметике» Л.Ф. Магницкого в 1703 г. Но сочинение Эйлера разительно отличалось от книги Магницкого, поэтому несложно представить себе все те огромные трудности, которые пришлось преодолевать В.Е. Адодурову, выполняя этот перевод. Учитывая это, заслугу в доступности изложения материала на русском языке, несомненно, следует разделить между самим автором книги Л. Эйлером и её переводчиком В.Е. Адодуровым.

Однако точные науки не стали основной специальностью В.Е. Адодурова. Он стал более известен как переводчик, филолог – теоретик и практик, принесший неоценимые услуги русской филологической науке.

В области деловой и научной прозы в те годы Адодуров был первым. Он перевёл значительную часть сочинений профессоров Петербургской Академии наук. Ему удалось не только подобрать удачные русские эквиваленты иностранных терминов, но и закрепить многие естественнонаучные термины в русском языке. По словам

[12] *Юшкевич А.П.* История математики в России до 1917 г. М., 1968. С. 80–81; *Полякова Т.С.* Леонард Эйлер и математическое образование в России. М., 2007. С. 79–83.

[13] *Полякова Т.С.* Леонард Эйлер и математическое образование в России. М., 2007. С. 83.

Л.Л. Кутиной, исследовавшей проблемы становления русской научной терминологии, «на протяжении не более чем трёех десятилетий был пройден путь от первых дословных, темных и “неудобопонятных” опытов передачи учёного текста до блестящих переводов 30-х гг. (В. Адодурова, А. Кантемира, И. Голубцова)»[14].

Усилиями коллектива филологов Академии в 1731 г. был выпущен большой трёхъязычный немецко-латино-русский словарь, составленный на основе немецкого словаря Э. Вейсмана. Работой переводчиков руководил Адодуров. К словарю была приложена грамматика «Anfangs-Gründe der russischen Sprache» («Первые основания российского языка»), автором которой был Василий Евдокимович. В этом приложении содержались грамматические основы русского литературного языка, изложенные (по-немецки) в элементарной форме. В заключительном абзаце названного сочинения автор сообщал читателям, что в данном издании содержатся только начальные сведения по русскому языку, но что соответствующих правил имеется вообще гораздо больше; по условиям объёма их изложение приходится оставить для более обширного сочинения... И такое сочинение появится, но гораздо позже.

Адодурову принадлежит заслуга в составлении орфографических правил для типографии Академии наук, введённых в 1733 г. Вскоре эти правила прочно утвердились и частично продержались до советской орфографической реформы 1918 г., т.е. без малого 200 лет.

В середине 1730-х гг. в области филологии стала всё более ощущаться необходимость создания специального органа при Академии, ответственного за разрешение назревших филологических проблем и выполнение больших работ. В результате в Академии наук возникло Российское собрание как коллективный орган переводчиков, в задачу которого входило «улучшение переводов посредством коллегиальной деятельности»[15]. Активное участие в работе Российского собрания принимал Адодуров, который «был душой всех коллективных словарных и других работ академических переводчиков»[16].

С 1736 г. В.Е. Адодуров осуществлял надзор за новыми учениками, среди которых был и М.В. Ломоносов; он обучал их немецкому, латинскому языкам и математике. В 1740–1741 гг. Адодуров преподавал в немецком классе академической гимназии арифметику и геометрию.

Примерно в этот же период молодой адъюнкт, собираясь посвятить себя изучению физики, начал работать с профессором Г.В. Крафтом. В реестре Академии наук за 1737 г. об Адодурове было написано: «Его главное намерение – физику доканчивать, дабы со временем самому профессорского чина удостоиться. Для того он ныне в сей науке со всяким прилежанием обучается и помогает профессору Крафту в экспериментах. Перевёл сокращённую механику на российский язык. <...> Впредь будет всякие выходящие математические и физические книги и вещи по-русски переводить и притом возможное тщание прилагать, дабы в физической науке в большее совершенство придти...»[17]. В 1739 г. был опубликован перевод Адодурова сочинения Крафта «Краткое руководство к познанию простых и сложных машин».

---

[14] *Кутина Л.Л.* Формирование языка русской науки. М.-Л., 1964. С. 6.

[15] *Макеева В.Н.* Адъюнкт Академии наук В.Е. Адодуров // Вестник Академии наук СССР. 1974. № 1. С. 116.

[16] Там же. С. 115.

[17] Материалы для истории Императорской Академии наук. Т. III. 1886. С. 572.

Трудно представить, но наряду с переводом технической литературы, каковым являлось сочинение Крафта, в это же время Адодуров продолжал свою деятельность как филолог. Его цель – составить «новую грамматику для способнейшего изучения»[18] русского языка. Грамматика не была издана на русском языке, но известна в рукописном списке 1738–1739 гг., анонимном и неполном. Она была переведена на шведский язык и в 1750 г. издана в Стокгольме М. Грёнингом.

Грамматика Адодурова должна была состоять из четырёх частей: Орфографии, Этимологии (морфологии), Синтаксиса и Просодии, однако последняя часть отсутствует как в русском списке, так и в переводе Грёнинга и, по всей видимости, не была написана. В первых трёх частях представлено развернутое и систематическое изложение курса русского языка, оказавшее влияние как на сочинения других лингвистов того времени, так и – опосредованно – на «Российскую грамматику» М.В. Ломоносова. Известный лингвист Б.А. Успенский данное сочинение называл «совершенно оригинальным и во многом революционным»[19].

Лингвистические взгляды В.Е. Адодурова основывались на признании самостоятельности и независимости гражданской орфографии и на отчетливом противопоставлении русского и церковнославянского правописания, стремлении определить нормы именно светского книжного языка, в принципе равноправного языку церковнославянскому. Это проявляется, например, при рассмотрении заимствованных слов, которые, по мнению Адодурова, должны в своём написании соответствовать их русскому произношению, а не орфографии языка–источника, что было принято в церковнославянской грамматике. Да и вообще, как отмечал автор, орфографические и произносительные нормы любого языка имеют абсолютно условный характер. Из этого вытекает ориентация грамматиста Адодурова на устную речь. Он выступает за фонетическое письмо и предлагает исключить из алфавита лишнюю букву ер – [ъ], не обозначающую звука. Это смелое предложение почти на двести лет опередило его практическую реализацию. Кроме того, в Грамматике обращается внимание на то, что в русском языке отсутствует знак для обозначения взрывного заднеязычного [г], подчёркивается, что русский звук [ы] представляет некоторую сложность для иностранцев, произносящих его то как [i], то как [и].

В.Е. Адодуров смог убедительно сформулировать общую тенденцию русского правописания, согласно которой перед звонкими («умягчёнными», по терминологии автора) согласными должны писаться звонкие, а перед глухими («жёсткими») – глухие.

В своем грамматическом сочинении Василий Евдокимович коснулся и других вопросов русского правописания и произношения. Он сформулировал основные принципы слогоделения, впервые сказал о такой важной особенности русской произносительной нормы, как аканье. Также в Грамматике имеются отдельные замечания о русской пунктуации, которые затем получили развитие в «Разговоре об ортографии...» В.К. Тредиаковского.

---

[18] Материалы для истории Императорской Академии наук. Т. IV. 1887. С. 408–409.

[19] *Успенский Б.А.* Первая грамматика русского языка на родном языке // Вопросы языкознания. 1972. № 6. С. 87.

Б.А. Успенский, специально исследовавший рукописный вариант Грамматики В.Е. Адодурова, высоко оценил значение данного сочинения: «...Появление грамматики на родном языке знаменует кодификацию норм живой речи и представляет собой тем самым кардинальный этап в истории литературного языка»[20]. Кроме того, именно работы В.Е. Адодурова, затем В.К. Тредьяковского, а позднее сочинения В.Н. Татищева создали базу для появления «Российской грамматики» М.В. Ломоносова.

С 1744 г. В.Е. Адодуров стал наставником в изучении русского языка невесты наследника престола, принцессы Софии – будущей императрицы Екатерины II. Более того, Василий Евдокимович поддержал императорские амбиции Екатерины, за что в 1759 г. был отправлен в «почётную ссылку за подготовку объявления Екатерины императрицей»[21] в Оренбург, где занял должность заместителя губернатора. Однако это не помешало ему продолжить занятия наукой, о чём свидетельствует его переписка с Г.Ф. Миллером, в которой он просил прислать ему «всех современных, чем-либо замечательных сочинений, для себя, и особенно учебных книг, для своей одиннадцатилетней дочери»[22]. Сделавшись императрицей, Екатерина II вернула своего учителя из ссылки, и в 1762 г. В.Е. Адодуров был назначен куратором Московского университета и президентом Мануфактур-коллегии.

К исполнению своих служебных обязанностей В.Е. Адодуров относился с особенным прилежанием. Приступив к должности куратора Университета, он обнаружил немало беспорядков, что заставило его не один раз обращаться ко двору с тем, чтобы «поправить это плачевное состояние»[23].

Во время его деятельности на посту куратора Университета был обстоятельно пересмотрен Устав, упорядочено штатное расписание этого учебного заведения, и на всех трёх факультетах «для лучшего распространения в России наук начались лекции природными россиянами на российском языке»[24] (ранее лекции читались преимущественно на латинском языке).

Оставаясь куратором Московского университета, В.Е. Адодуров переехал в Петербург, но «до конца жизни своей, последовавшего в 1778 г., сохранял почётный титул куратора, хотя уже деятельно и не правил этой должностью. Академия наук, незадолго до конца его кончины, избрала его в свои почётные члены»[25].

Трудно переоценить значение Петербургской академии наук в развитии науки и просвещения в России. Но при этом не следует забывать и о тех, чьими трудами это развитие осуществлялось. Одним из таких славных подвижников российской науки и просвещения явился первый русский адъюнкт и переводчик Василий Евдокимович Адодуров, сыгравший тогда огромную посредническую функцию между зрелой европейской и зарождающейся русской научными школами.

---

[20] Там же. С. 85.
[21] Русский биографический словарь Ф.А. Брокгауза и И.А. Ефрона. М., 2007. С. 12.
[22] *Шевырев С.П.* История Императорского Московского университета, написанная к столетнему его юбилею.1755–1855. М., 1855. С. 124.
[23] Там же. С. 124.
[24] Там же. С. 141.
[25] Там же. С. 171.





Конспект семинара учебно-исследовательских работ школьников по математике



Наталья Михайловна НЕТРУСОВА
учитель математики школы-интерната
«Интеллектуал» г. Москвы
natnetint@gmail.com



Алексей Иванович СГИБНЕВ
учитель математики школы-интерната
«Интеллектуал» г. Москвы
sgibnev@mccme.ru

На седьмом и восьмом заседаниях семинара ***Г.Б. Шабат*** сделал доклады на тему **«Геометрия как источник исследовательских тем для школьников»**. Для удобства чтения эти доклады объединены.

Геометрия отвечает на вопросы: «Где мы живем?» (классическая постановка), «Какие возможны миры?» (современная постановка).

Ответ: плоскость или пространство. Какое оно: плоское или кривое?

Интересно, что ответ «плоское» не описывает реальный мир.

С чего начинается геометрия?

Подумаем об аксиоматике геометрии.

I постулат: Через две разные точки проходит прямая и только одна.

V постулат (или *аксиома параллельности*): Через точку, не лежащую на прямой, проходит прямая, параллельная данной, и только одна[1].

(Ещё для нетривиальности геометрии нужно ввести:

0-й постулат: На плоскости есть хотя бы один треугольник.)

Мы покажем, что с этими постулатами уже возможны содержательные геометрические задачи.

[1] Как обычно на плоскости, прямые называются параллельными, если они не имеют общих точек.

Три языка геометрии

Чертёж (как язык вроде бы никем не описан). Понятие чертежа эволюционирует. Видимо, будущее за цветными и анимированными чертежами. Встаёт вопрос о чертежах, которые можно было бы понимать без дополнительных пояснений.

Естественный язык. Состоит из правильно построенных с точки зрения русского языка фраз с математическим смыслом, например I постулат: «Через две разные точки проходит прямая и притом только одна».

Формальный язык. Например, тот же I постулат: $\forall P,Q; [P \neq Q] \Rightarrow \exists! l; [l \ni P] \wedge [l \ni Q]$.

Лингвисты мечтают о точно описанных языках, потому что с ними легко работать. Но от таких записей они приходят в уныние – уж очень не похоже на привычные им языки – и не торопятся описать формальный язык. В связи с такими записями вспоминается шутка: «Математики – странные люди: говорят одно, а пишут другое».

Здесь возникает педагогическая проблема: как эти языки сочетать?

Возможные проекты по формальным языкам:

1. Компьютерная проверка правильности фразы на формальном языке.
2. Удобный редактор для ввода формальных фраз.

Если это сделать, то формализуется доказательство, и тогда возможна компьютерная проверка правильности доказательства.

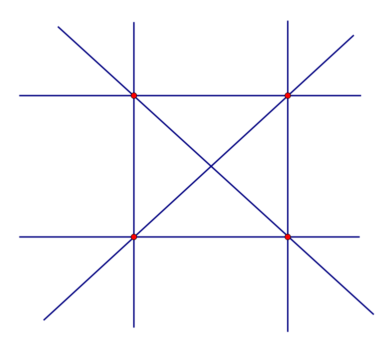
Тема 1: Квазиплоскости

Будем рассматривать *квазиплоскости*, т.е. множества, в которых выделены некоторые подмножества, именуемые прямыми, и в которых выполнены 0, I и V постулаты. Встаёт вопрос об описании всех квазиплоскостей.

Квазиплоскостей много.

Пример: $\mathcal{A}^2(\mathcal{F}_2)$.

Четыре точки и шесть прямых (в центре точки нет!):



Обобщение: аффинная плоскость над конечными полями $\mathcal{A}^2(\mathcal{F}_p)$.

Точкой назовём пару чисел (x, y), где $x, y \in \mathcal{F}_p$.

Прямой назовём множество точек (x, y), удовлетворяющих уравнению

$$ax + by + c = 0,$$

где a, b, c принадлежат $\mathcal{F}_p$, причем a и b не равны нулю одновременно.

Упражнение. Доказать, что это действительно квазиплоскость (т.е. что для такого множества выполнены I-й и V-й постулаты).

Первые теоремы о квазиплоскостях

Рассмотрим две пересекающиеся прямые – «оси». Через точку, не принадлежащую этим прямым, проведём 2 прямые, параллельные осям. Каждая прямая пересечёт другую ось (почему?). Эта конструкция показывает, что справедлива:

Теорема 1. Существует биекция плоскости на произведение двух прямых (т.е. на множество всех пар (x, y), где x – точка одной прямой, а y – точка другой прямой).

Теорема 2. Между любыми двумя прямыми существует биекция, следовательно, они равномощны.

Следствие. Если плоскость конечна, то количество её точек – полный квадрат.

Примеры конечных плоскостей:

4 точки – уже было

9 точек – легко строится

16 точек – посложнее. Можно через поле $\mathcal{F}_4$, а можно синтетическими рассуждениями

25 точек – для школьников непросто, но реально

36 точек не бывает, как нет и поля $\mathcal{F}_6$

Компьютерный проект: перебрать все квазиплоскости.

Берем n^2-элементное множество, разбиваем его каким-то образом на подмножества и проверяем, не являются ли эти подмножества прямыми (т.е. не выполняются ли для них I и V постулаты).

Посмотрим, что интересного можно найти на квазиплоскостях.

Тема 2: Параллелограммы на квазиплоскостях

Назовём фигуру из четырех прямых, изображённых на рисунке, параллелограммом.

Факт: Если у одного параллелограмма диагонали параллельны, то и у всех параллелограммов диагонали параллельны.

Если диагонали не параллельны, то можно рассматривать точку их пересечения. Назовем её серединой отрезка. Это даёт определение середины, не использующее понятие длины.

Упражнение. Проверить корректность определения (почему середина не зависит от выбора параллелограмма?). Она не следует из аксиом I, V.

Оказывается, корректность определения следует из дезарговости плоскости.

Дезарговость плоскости означает следующее: если есть два треугольника ABC и abc в пространстве такие, что Aa, Bb и Cc пересекаются в одной точке, то точки пересечения прямых AB и ab, AC и ac, BC и bc лежат на одной прямой. Другими словами: два треугольника обладают центром перспективы $\Leftrightarrow$ они обладают осью перспективы.

Отметим, что в пространстве теорема Дезарга легко выводится только из аксиом, относящихся к инцидентности точек, прямых и плоскостей. Поэтому дезарговость плоскости равносильна вложимости плоскости в пространство.

Открытая задача: перечислить все конечные недезарговы плоскости.

Итак, уже около самых оснований геометрии есть содержательная и красивая математика!

Две картинки на тему теоремы Паскаля

Вернёмся к бесконечным плоскостям.

Блез Паскаль в шестнадцать лет доказал теорему о «Мистическом шестиугольнике» (см. чертёж 1). Это не просто случайный факт, а одна из центральных теорем геометрии: «Если шестиугольник вписан в конику, то три точки пересечения продолжений пар противоположных сторон лежат на одной прямой».

Обратное утверждение (см. чертёж 2) показывает, как конику можно построить с помощью только точек и прямых. Это значит, что в упрощённой геометрии, о которой шла речь выше, есть место для коник!

На восьмом заседании семинара *17 мая 2009 г.* были заслушаны доклады учеников. Доклад **«Двуквадратные числа»** помещен в настоящем номере журнала «Полином» (см. с. 53–62). Остановимся на других работах.

1. Андрей Блинов «Пространственные шахматы» (*10 класс, школа «Интеллектуал», научный руководитель Я.И. Абрамсон*)

Задача. На бесконечном поле король играет против нескольких ладей. Смогут ли ладьи поставить королю мат? Если да, то сколько их понадобится? Ладья бьёт три ряда: горизонтальный, вертикальный и продольный.

Решение. Рассмотрим проекцию игры на горизонтальную плоскость. Каждая ладья бьёт вертикальный ряд, т.е. «сжигает» одну клетку в плоскости проекции. Если король попадёт в замкнутую фигуру из сожжённых клеток, то победа ладьям обеспечена. Будем ставить ладей по высоте очень далеко от плоскости короля, чтобы он заведомо не смог до них добраться за время игры. Тогда игра полностью сводится к двумерным шахматам между королём и игроком, сжигающим клетки.

Утверждается, что игрок, сжигающий клетки, всегда может победить. Предлагается следующая стратегия: запираем короля в квадрат со стороной 545 клеток. Будем строить контур квадрата, сжигая вначале 1 клетку через 16. Там, куда пойдёт король, будем постепенно сгущать контур. Можно доказать, что мы всегда успеем достроить кусок забора до прихода к нему короля (правда, докладчик не предъявил полного доказательства, но убедил слушателей).

Была показана компьютерная программа, демонстрирующая проекцию игры на плоскость.

Комментарии к докладу.

Г.Б. Шабат:

1) в презентации лучше видеть ладей и королей, чем зелёные и красные квадратики;

2) интересно было бы сделать софт для пространственных шахмат;

3) ещё можно играть в шахматы на торе.

К.В. Медведев:

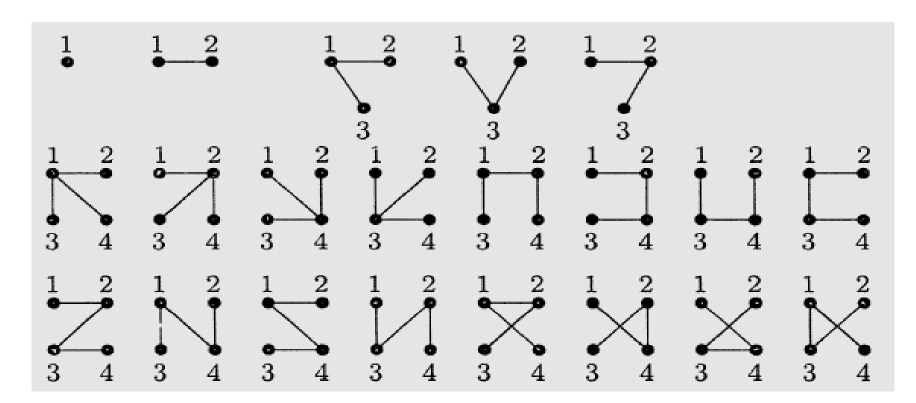
1) было бы интересно найти оптимальную стратегию, но это сложно; стоит «добить» хотя бы эту стратегию – показать, что при ней данный размер квадрата минимальный, и т.д.;

2) нетрудно запрограммировать и легко изучать игру со случайным блужданием короля.

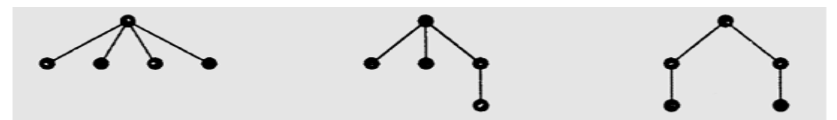
2. Дима Горбунов «Подсчёт числа пронумерованных деревьев» (7 класс, *школа «Интеллектуал», научный руководитель А.И. Сгибнев*).

Задача. Какое количество деревьев можно построить на n пронумерованных вершинах?

Очевидно, что на 1-й вершине можно построить лишь 1 дерево с 0 ребрами. На 2-х вершинах – 1 дерево. На 3-х вершинах – 3 дерева. На 4-х – 16. Ниже показаны способы для таких количеств вершин.



Пусть $n = 5$. Теперь прямой подсчёт уже достаточно сложен. Подсчитаем количество неизоморфных деревьев. Их три:



Первое из них можно пронумеровать 5 способами, второе – $\frac{5!}{2!} = 60$ способами, третье – тоже $\frac{5!}{2!} = 60$ способами. Сложим всё это: 5 + 60 + 60 = 125. Соберём данные в таблицу:

Количество вершин	1	2	3	4	5
Количество деревьев	1	1	3	16	125

Выдвигаем гипотезу.

Теорема. Количество деревьев, которые можно построить на n пронумерованных вершинах, равно n^{n-2}.

Теперь докажем эту теорему. Перед этим введём новые понятия.

Определения. Помеченным деревом называется дерево, в котором выделены две вершины, одну из них будем называть левым концом, а другую – правым. (Например, можно отмечать левый конец кружочком, а правый – квадратом.)

Пусть F_n – количество помеченных деревьев на n вершинах, а K_n – количество деревьев на n вершинах графа.

Для доказательства потребуется лемма.

Лемма. $F_n = K_n n^2$.

Доказательство. Действительно, берём дерево и выбираем одну из вершин n способами и другую – n способами. Итого – $K_n n^2 = F_n$, ч.т.д.

Доказательство теоремы. По лемме $F_n = K_n n^2$. Если мы докажем, что $F_n = n^n$, то $K_n = \frac{F_n}{n^2} = \frac{n^n}{n^2} = n^{n-2}$.

Рассмотрим множество помеченных деревьев на n вершинах и множество ориентированных графов, у которых: 1) из каждой вершины идёт ровно одно ребро; 2) между двумя вершинами не более двух рёбер; 3) разрешены петли.

Количество способов построить такой ориентированный граф – n^n, поскольку из первой вершины ребро можно провести n способами (петля и $n - 1$ вершина), из второго – тоже n и т.д., в результате получается n^n.

Докажем, что множества помеченных деревьев и ориентированных графов равномощны. Рассмотрим какой-либо ориентированный граф и попробуем превратить его в помеченное дерево. Введём новое множество M_1, в которое включим все вершины циклов графа, причем номера вершин идут в порядке возрастания. Введём функцию $f(x)$ – номер вершины, в которую идёт ребро из вершины с номером x. Пусть $M_1 = \{a, b, c, d, \ldots, z\}$ и $M_2 = \{f(a), f(b), f(c), \ldots, f(z)\}$. Соединим все вершины множества M_2 рёбрами: из $f(a)$ в $f(b)$, из $f(b)$ в $f(c)$ и т.д. При этом отметим $f(a)$ левым концом, а $f(z)$ – правым. Все остальные вершины (не включённые в множество M_2) соединим точно так же, как и в ориентированном графе. Получилось помеченное дерево, так как мы убрали все циклы.

Нетрудно получить и обратный результат – из дерева сделать ориентированный граф. Возьмем P – путь из левого конца в правый и включим его без изменений в множество M_2. Расположим числа в множестве P в порядке возрастания и включим результат в множество M_1. $M_1 = \{a, b, c, d, \ldots, z\}$. $M_2 = \{f(a), f(b), f(c), \ldots, f(z)\}$. Строим циклы ориентированного графа по этим двум множествам. Оставшиеся вершины подключаем так же, как они подключены к вершинам циклов, по направлению к ним. Получился ориентированный граф.

Таким образом, мы установили взаимнооднозначное соответствие, поскольку из каждого помеченного дерева получается ориентированный граф, а из него получается то же самое помеченное дерево. Из двух ориентированных графов не может получиться одно и то же дерево, так как тогда это дерево даёт 2 ориентированных графа, а этого быть не может. Аналогично и с деревьями – из двух помеченных деревьев не может получиться один ориентированный граф, так как из него тогда получается два дерева. Противоречие. Значит, установлено взаимнооднозначное соответствие, поэтому эти множества равномощны. Теорема доказана.

Комментарий руководителя о ходе работы. Дима за несколько дней угадал формулу с помощью последовательного перебора помеченных деревьев с 1, 2, 3, 4 и т.д. вершинами. Затем около месяца безуспешно пытался её доказать (я ему особенно не помогал, чтобы он почувствовал сложность задачи). Когда Дима начал уставать, я стал давать ему подсказки, стараясь навести на то решение, которое знал сам[2]. Однако в результате он придумал другое доказательство. Угаданная формула подсказывает путь доказательства: построить биекцию с множеством из n элементов, каждый из которых принимает одно из n значений. Дима нашёл такое множество и смог пройти этим путём. И это поучительная демонстрация того, что когда учитель не пытается всё жёстко распланировать, может «вырасти» что-то новое для него самого!

◀ Вернуться к содержанию

[2] Имеется в виду кодирование. См.: *Сгибнев А.И., Нетрусова Н.М.* О работе семинара учебно-исследовательских работ школьников по математике // Полином. 2009. № 2. С. 95.